MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere nec timide.

TOME PREMIER.

(AVEC 7 PLANCHES.)

LIÉGE,

CHEZ FÉLIX OUDART, IMPRIMEUR.

BRUXELLES ET LEIPZIG, CHEZ C. MUQUARDT.

PARIS, CHEZ RORET, rue Hautefeuille, 10 *bis*.

1843 et 1844.

AVERTISSEMENT.

En publiant la première partie de ses mémoires, la Société royale des Sciences de Liége croit devoir faire connaitre en peu de mots son origine, sa composition et la nature des travaux en vue desquels elle a été instituée.

L'idée de sa création a pris naissance, dès l'année 1835, dans la faculté des Sciences de l'Université de Liége. Les membres de cette faculté, qui conçurent ce projet, étaient mûs non seulement par le désir de contribuer autant qu'il était en leur pouvoir au progrès des Sciences dont l'enseignement leur était confié; ils voulaient encore par là resserrer les liens d'estime et d'affection qui les unissaient à leurs collègues, et créer dans la province de Liége un centre auquel pussent se rallier toutes les personnes qui, dans ce pays si éminemment industriel, ne se contentent pas de la pratique, et se livrent à des recherches sur les principes scientifiques qui lui servent de base. Il entrait aussi dans leurs vues d'offrir à MM. les officiers des corps spéciaux de l'armée ainsi qu'à MM. les ingénieurs de l'État les moyens de faire connaître les faits intéressants que la nature de leurs fonctions les met souvent à même d'observer.

Les difficultés inhérentes à tout projet de cette nature ayant été surmontées, la Société projetée se trouva constituée provisoirement. Ses membres fondateurs redigèrent des statuts qui furent soumis à l'approbation du gouvernement, et par lettre officielle du 13 avril 1835, M. le ministre

de l'intérieur et de l'instruction publique annonça à la Société non seulement qu'elle était autorisée, mais que Sa Majesté daignait lui conférer le titre de *Société royale.*

L'instruction supérieure était alors en Belgique dans un état provisoire dû aux événements politiques qui agitaient le pays depuis quelques années et le gouvernement s'occupait sérieusement de sa réorganisation, qui eut lieu à l'instant même où la Société venait de recevoir l'autorisation qui la constituait d'une manière définitive. Il en résulta dans le personnel de l'Université de Liége, des changements qui enlevèrent à la Société quelques-uns de ses membres résidants sur lesquels elle fondait les plus légitimes espérances pour l'avenir de ses travaux. Ce fut un premier contretemps qui retarda la mise en activité de ceux-ci.

L'année suivante elle eut le malheur de perdre M. le docteur Schmerling, habile paléontologiste, bien connu du monde savant par le bel ouvrage qu'il a publié sur les ossements fossiles des cavernes de la province de Liége.

Un an plus tard la mort lui enlevait encore le célèbre anatomiste Fohmann, qui s'était montré un de ses fondateurs les plus actifs et lui avait promis de concourir avec zèle à ses travaux.

Ces deux pertes à jamais regrettables ainsi que d'autres circonstances qu'il est inutile de mentionner, expliquent pourquoi la Société frappée aussi cruellement dès sa naissance n'a rien publié jusqu'ici. Cette première partie de ses mémoires est la meilleure assurance qu'elle puisse donner au public de la disparition de tous les obstacles qui ont entravé sa marche jusqu'à ce jour. Les autres parties paraîtront à des époques indéterminées qui dépendront de l'abondance des matériaux et des ressources pécuniaires de la Société. Néanmoins les mesures sont en grande partie prises pour qu'il soit publié un volume chaque année.

Les statuts de la Société étant calqués sur ceux des corps savants en général, il n'a pas été jugé nécessaire de les reproduire ici en entier. Il suffira de faire connaître celles de leurs dispositions qui sont de nature à intéresser le public.

La Société se compose :

1° De *membres effectifs* qui ne peuvent être choisis hors de la province de Liége et qui sont astreints à payer une cotisation annuelle de 20 francs.

2° De *membres correspondants* régnicoles et étrangers.

Nul ne peut être nommé membre effectif sans remettre à la Société un travail imprimé ou un travail manuscrit destiné à être inséré dans ses mémoires.

Le nombre des deux sortes de membres dont il vient d'être question n'est pas déterminé par les statuts. Néanmoins l'intention de la Société est de s'imposer à cet égard des limites qui seront fixées prochainement et portées plus tard à la connaissance du public.

La Société est divisée en deux sections : l'une des *Sciences d'observation*, l'autre des *Sciences de calcul*. A chacune de ces sections est attaché un commissaire dont les fonctions consistent à surveiller et activer l'impression des mémoires qui sont de son ressort.

Les travaux de la Société embrassent toutes les branches des sciences physiques, mathématiques et naturelles, considérées sous le double point de vue théorique et pratique. L'art médical seul, à l'exception de l'anatomie et de la physiologie, n'est pas compris dans la sphère de ses attributions.

Son but n'est pas seulement d'agrandir le domaine de la science; mais encore de répandre les notions acquises à cette dernière. A cet effet, elle admettra dans son recueil, les mémoires destinés à exposer les progrès accomplis dans le cours d'un certain nombre d'années dans les diverses branches des connaissances humaines dont il vient d'être

question. Elle laisse à cet égard à ses membres toute liberté de choisir les points qu'il leur paraîtra convenable de traiter. Ces résumés ressembleront à certains égards aux revues annuelles qu'ont coutume de publier les principaux recueils scientifiques de l'Allemagne. Ils en différeront cependant en ce qu'ils seront moins généraux, en ce qu'ils n'embrasseront pas une période de temps aussi courte, enfin en ce que leurs auteurs s'occupant d'un sujet plus restreint, pourront le traiter avec plus d'étendue et le mettre ainsi à la portée d'un plus grand nombre de personnes.

Les membres de la Société en réunissant leurs efforts dans un but commun, n'ont fait qu'obéir à cette impulsion presque irrésistible qui, de nos jours, dans tous les genres, porte les hommes à s'associer entre eux. Il y a place pour tous dans le champ de la science; la devise qu'ils ont choisie : *Nec temere nec timide*, exprime suffisamment l'esprit dans lequel ils se proposent de le cultiver.

LISTE DES MEMBRES

DE LA

SOCIÉTÉ.

Nota. Les noms des membres fondateurs sont précédés d'un astérisque.

BUREAU.

PRÉSIDENT, M. Gloesener.
Vice-président, M. Dumont.
Secrétaire-général, M. Brasseur.

Membres effectifs.

MM.
1835 * Brasseur, professeur à l'université.
1842 Chandelon, agrégé à l'université.
1842 De Konninck, professeur à l'université.
1835 * Delvaux, professeur émérite à l'université.
1835 * Devaux, ingénieur en chef des mines.
1835 * Dumont, professeur à l'université.
1835 * Frédérix, lieutenant-colonel, directeur de la fonderie de canons, à Liége.
1835 * Gloesener, professeur à l'université.
1842 Lacordaire, professeur à l'université.
1842 Laguesse, sous-ingénieur des mines.
1835 * Lemaire, professeur à l'université.
1835 * Lesoinne, professeur à l'université.
1842 Martinowski, répétiteur à l'école des mines.
1842 Maus, ingénieur des ponts et chaussées.
1842 Navez, lieutenant d'artillerie.
1842 Neuens, capitaine d'artillerie.
1842 Noel, professeur à l'université.
1842 Pasquier, pharmacien en chef à l'hôpital militaire.
1842 De Sélys-Longchamps (Baron Edm.).

MM.

1842 Spring, professeur à l'université.
1842 Timmermans, lieutenant-colonel d'artillerie, directeur de l'école de pyrotechnie et de la manufacture d'armes, à Liége.
1842 Trasenster, sous-ingénieur des mines.

Membres correspondants.

MM.

1835 Dandelin, lieutenant-colonel du génie, à Liége.
1842 Decaisne, aide-naturaliste au muséum d'histoire naturelle, à Paris.
1835 Dumortier (B. C.), membre de la chambre des représentants.
1835 Guillery, professeur à l'athénée de Bruxelles.
1835 Omalius d'Halloy (D'), ancien gouverneur de la province de Namur, à Halloy.
1835 * Pagani, professeur à l'université de Louvain.
1835 Quetelet, directeur de l'observatoire, secrétaire perpétuel de l'académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles.
1842 Schwann, professeur à l'université de Louvain.
1835 Teichman, inspecteur-général des ponts et chaussées.
1835 Timmermans, professeur à l'université de Gand.
1842 Van Beneden, professeur à l'université de Louvain.

Membres décédés depuis la fondation de la société.

MM.

Cauchy, ingénieur en chef des mines, à Namur, membre correspondant.
Fohmann, professeur à l'université, membre fondateur.
Schmerling, docteur en médecine, membre fondateur.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

I. *De l'Analogie en Géométrie.*

Par J.-N. NOËL, Professeur à l'Université de Liége.

CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

I. Les quantités *continues* et surtout les *figures* que la géométrie considère, sont d'un continuel usage dans les arts, où il faut les *construire*, d'après certaines conditions, et les *comparer* entre elles, pour avoir une idée précise de chacune. Il importe donc beaucoup alors de connaître parfaitement et la *forme* et l'*étendue* de la figure cherchée, aussi bien que de la figure donnée. Celle-ci pourrait limiter un corps matériel dont l'ensemble échapperait à la vue, bien qu'il fût mis sous les yeux; dans ce cas on n'aurait qu'une idée fort vague de la figure proposée; et c'est ici que le dessin devient d'un merveilleux secours pour *représenter* la figure et mettre toutes ses parties en évidence sur le papier.

Or, comme tout ce qui existe en *grand* peut se concevoir en *petit*, et réciproquement, il est clair que deux quantités géométriques peuvent avoir la même *forme*, sans avoir la même *étendue;* et dans ce cas on dit que les deux figures sont *semblables*, parce que l'une peut remplacer l'autre et en tenir absolument lieu, pour l'étude de leurs *propriétés* communes et pour les opérations que l'on aurait à exécuter sur cette dernière.

II. Pour que la figure F soit *semblable* à la figure F′, il faut, si elles sont planes, que les angles de F soient respectivement égaux

aux angles de F′ et disposés dans le même ordre ; il faut de plus que chaque ligne de F ait un *rapport* constant avec la ligne correspondante ou *homologue* de F′ et la *représente* en *longueur* et en *position.* Alors en effet, toutes les *parties* de F *représentent* les parties homologues de F′, en position et en grandeur ; de telle sorte que tout ce qu'on dira de F pourra se dire de F′ et réciproquement. La figure F *représente* donc complètement la figure F′ et jouit exactement des mêmes propriétés : elle lui est *semblable* en tout. Les deux figures ont d'ailleurs la même *forme* et ne diffèrent que par leurs grandeurs individuelles, puisque si le rapport constant était l'unité abstraite, c'est-à-dire si deux lignes homologues étaient égales, les deux figures pourraient se confondre en une seule.

La théorie des figures semblables ne consiste pas seulement à les définir clairement ; mais surtout à faire connaître les conditions *nécessaires* et *suffisantes* à la *similitude*, c'est-à-dire les *éléments générateurs* de chaque figure et l'emploi de ces éléments pour que, comme dans l'art du sculpteur, l'une des deux figures étant donnée, on puisse la *copier*, c'est-à-dire construire l'autre figure, avec une étendue plus petite ou plus grande ou parfaitement égale.

On voit l'importance de la notion de similitude, qui fournit à l'art du dessin les moyens de représenter sur le papier et de mettre sous les yeux, pour l'étudier et en avoir une idée claire, toute quantité géométrique, donnée comme *modèle* à copier et dont l'ensemble échapperait à la vue.

III. Il est évident que les théories de la géométrie ne portent que sur des figures semblables ou supposées telles. Mais la similitude, qui doit être parfaite quand il faut construire la figure cherchée, d'après un modèle donné, n'est toujours que plus ou moins approchée lorsqu'il s'agit d'étudier la figure. Dans ce dernier cas, la *copie* imparfaite, ou plutôt le *croquis*, suffit pour diriger les raisonnements ; lesquels ne portent que sur les *définitions* et non sur la figure particulière.

En général, on *devine* et l'on facilite la démonstration d'un théorème ou la solution d'un problème de géométrie, par la figure, mise sous les yeux ; mais lorsqu'on est familiarisé avec les combinaisons géométriques, il est parfois plus simple d'opérer sans aucune figure tracée : chaque figure alors est représentée par une lettre, ordinairement la lettre initiale du nom. On représente aussi par une lettre chaque partie à considérer.

La *régularité* et la *symétrie* d'une figure, soit par rapport à un *centre,* soit par rapport à un *axe*, en simplifient l'étude et le dessin. Deux figures peuvent être *égales* par *symétrie* ou être *inversement semblables;*

et dans ces deux cas, l'une est la *copie inverse* de l'autre. Ces figures se présentent dans les arts, pour les ornements, aussi bien que les figures *égales* et *semblables*, et sont essentiellement du ressort de la géométrie, où elles jouent un rôle important.

IV. Le dessin ou la construction *graphique* de la figure donne bien la *forme* de celle-ci, c'est-à-dire la *disposition* de ses parties successives les unes à l'égard des autres; mais il n'en résulte pas l'idée précise de son *étendue*, que l'on ne peut connaître complètement que par le *mesurage*.

En général, il est essentiel d'exprimer exactement en nombres *concrets*, de même espèce, toutes les quantités continues de même nature; non-seulement pour faciliter leur *comparaison* ou la rendre possible; mais surtout parce que le nombre concret résultant *représente* la quantité proposée, ou plutôt sa *grandeur*, et en donne une idée plus complète que si cette quantité *matérialisée* était sous les yeux.

Par exemple, bien que j'aie sous les yeux la droite tracée D, je ne connais pas encore sa *longueur*; mais si je la *mesure* avec le mètre, en portant celui-ci sur D autant de fois successives qu'il est possible, puis en portant le décimètre sur le reste, le centimètre sur le second reste et que je trouve ainsi $D = 54^{m}26$ centimètres, sans reste; j'aurai la connaissance parfaite de la droite D, parce que je connais parfaitement le mètre et le centimètre que j'ai vus et maniés plusieurs fois.

C'est ainsi que l'on peut *mesurer* toute droite tracée et en avoir l'idée complète; mais cela demande des soins et des précautions pour trouver un nombre, sinon rigoureusement exact, ce qui est impossible, du moins suffisamment approché du véritable.

Si D est tracée sur le terrain et qu'on veuille trouver sur le papier la droite D′, propre à *représenter* complètement la droite D, il faudra choisir l'unité linéaire u', qui représente l'unité linéaire u sur le terrain, assez petite pour qu'en prenant $D' = 54{,}26\ u'$, lorsque $D = 54{,}26\ u$, la droite D′ puisse se tracer sur le papier. Dans ce cas on dit que la droite D′ est *semblable* à la droite D; car elle la représente et en tient absolument lieu, pour les opérations à exécuter sur D, lesquelles s'effectuent avec plus de facilité sur D′; et le résultat en u' est absolument le même que le résultat cherché en u.

V. En général, soit a une quantité continue quelconque, limitée de toutes parts, telle qu'une *ligne*, une *surface* ou un *volume* : cette quantité a nécessairement une *grandeur* ou une *valeur*, dont la connaissance précise est souvent indispensable. Or, cette grandeur n'est pas connue par la seule inspection de a, mise sous les yeux;

elle ne peut se déterminer complètement que par le mesurage, donnant le *rapport* de la grandeur cherchée à celle, bien connue, de l'*unité* u, de même nature que a.

Par l'usage fréquent que nous faisons de cette unité u, choisie d'ailleurs la plus simple parmi les quantités de son espèce, nous en acquérons le sentiment et l'idée la plus claire : voilà pourquoi nous connaissons bien la grandeur exprimée par un nombre de ces unités.

Ainsi le but qu'on se propose quand on veut *mesurer* a par u, c'est de trouver, le plus exactement possible, le nombre n tel qu'on ait $a = u \times n = nu$; en sorte que la quantité a soit exactement *représentée* par le nombre concret nu. Et comme $a = nu$ donne $a : u = n$, on voit que mesurer a par u, c'est chercher combien de fois a contient u; le quotient n, résultat du mesurage est dit la *mesure* ou la *valeur numérique* de a, parce que l'unité u étant le plus souvent *sous-entendue*, il vient simplement $a = n$. De cette manière, la lettre a représente à la fois la quantité proposée et sa mesure : donc si $a = 13$, cela signifie que $a = 13u$.

Une fois que l'on connaît exactement le nombre abstrait n, tout problème sur la grandeur a se résoudra sur le nombre nu; et cela avec plus de facilité et d'exactitude que si l'on opérait sur la quantité a elle-même, mise sous les yeux : cette quantité d'ailleurs pourrait ne pas être entièrement *visible*, ni entièrement *accessible*.

On voit l'importance du nombre abstrait n : aussi la détermination exacte de ce nombre, qui offre souvent de grandes difficultés *pratiques*, est-elle le but essentiel des sciences, telles que la *géométrie*, pour les *angles*, les *lignes*, les *surfaces* et les *volumes;* la *physique* et la *chimie,* pour différentes sortes de quantités continues; etc.

VI. Nous ne pouvons connaître les choses en elles-mêmes, c'est-à-dire sans les comparer à d'autres, de même nature, et il n'y a pas pour nous de *grandeur absolue.* Cela est si vrai, que si a est une longueur de 5 *pieds* et qu'à notre insu, cette longueur et celle du pied augmentent chacune de sa millième partie, nous ne pourrons nous apercevoir de cette double augmentation; car la longueur a sera toujours 5 pieds, comme auparavant. Ce n'est que par la comparaison des deux longueurs à une troisième, dont le changement ne serait pas sa millième partie, que nous pourrions soupçonner qu'il y a augmentation dans les deux longueurs; mais nous ne connaîtrions pas l'augmentation réelle de chacune; tant il est nécessaire, pour bien connaître les grandeurs, que le terme de comparaison demeure invariable.

Le meilleur système de mesures est donc celui où l'on peut les

vérifier, pour les ramener à des grandeurs constantes; mais parmi les choses matérielles, en est-il qui soient absolument invariables? La chaleur, l'humidité, la sécheresse, le frottement et enfin la durée modifient les corps, bien qu'il en existe plusieurs, comme le marbre et les pierres dures, dont les changements soient forts petits. Pour avoir des *unités* de grandeurs invariables, il faudrait donc les rendre, en quelque sorte, indépendantes de la matière. C'est ce qu'on a voulu réaliser dans le nouveau système métrique : il faudrait un changement, bien extraordinaire, dans la forme de la terre, pour que la mesure du quart du méridien, qui passe par l'observatoire de Paris, pût modifier la longueur du mètre, d'une manière notable. Et quand même la première mesure du méridien et celle que l'on ferait ensuite, pour vérifier le mètre, seraient fautives chacune d'un myriamètre; comme les erreurs ne peuvent avoir lieu précisément dans le même sens, l'erreur finale n'atteindrait pas le millimètre.

VII. On ne peut comparer entre elles que des choses de même nature, et encore souvent cette comparaison n'est possible que par *l'unité de valeur*, comme pour la beauté d'un *tableau* ou d'une *pierre*, dite précieuse. Chaque chose a nécessairement une *valeur*, constante ou variable, que l'on peut estimer en *unités monétaires;* et ainsi chaque chose a son *prix*, qui sera un *prix d'affection* pour le diamant, l'émeraude, la topaze, les peintures sur toile, etc. En un mot, toutes les grandeurs peuvent s'exprimer par des nombres, de la même unité monétaire, nombres indispensables, dans les usages de la vie sociale, et sans lesquels nos connaissances seraient fort bornées, relativement à ces grandeurs.

On appelle *rapport* ou *raison* le résultat de la comparaison de deux grandeurs a et b, de même nature. La différence $a - b$ est donc déjà un rapport; mais ce qu'on appelle essentiellement *rapport* ou *raison*, c'est le nombre abstrait n, par lequel il faut multiplier le *conséquent* b, pour avoir l'*antécédent* a; de telle sorte qu'on ait exactement $a = b \times n = bn$; d'où $a : b = n$. Ici les deux points verticaux représentent *divisé par;* mais il faut les énoncer *est à*, pour mieux rappeler que a est comparé à b et que n, *valeur* du rapport, est le résultat de cette comparaison.

Si $n = 8$, on aura $a = 8b$; et si $n =$ 8 onzièmes, a sera les 8 onzièmes de b; ainsi *le rapport indique toujours comment l'antécédent se trouve avec le conséquent*, ce qu'il faut bien remarquer. Cela résulte d'ailleurs de la définition de la multiplication, où l'on dit que *le produit se trouve en opérant sur le multiplicande, comme le multiplicateur en opérant sur l'unité.* Cette définition, la plus générale et con-

séquemment la plus utile, constitue le *principe d'analogie*, comme nous le développerons plus bas.

Les rapports sont d'un usage fréquent et nécessaire ; nous ne connaissons réellement que des rapports et ne pensons que par eux ; enfin, toutes nos études, du moins dans des sciences exactes, se réduisent à comparer et à mesurer, pour trouver des rapports et les exprimer. La relation $a = bn$ est donc fondamentale, par les conséquences, faciles à déduire, qu'elle fournit.

Cette relation est unique, c'est-à-dire que deux grandeurs, de même nature, ne peuvent avoir qu'un seul rapport, dont elles sont les *termes*. Car si elles en avaient deux n et r, d'où $a = bn = br$, on aurait $n = r$; contrairement à l'hypothèse.

De plus, la relation $a = bn$ existe nécessairement. Car si b restant de grandeur *constante*, on suppose que le nombre n *varie* et croisse depuis zéro, par *degrés insensibles*, il est clair que le produit $b \times n$ croîtra aussi par degrés insensibles et passera par tous les états imaginables de grandeur, depuis zéro ; on peut donc toujours supposer au nombre n une valeur telle, que le produit $b \times n$ donne exactement la quantité a.

A la vérité, si l'on avait $n^2 = 7$, le nombre n ne pourrait se déterminer exactement; c'est-à-dire que les deux quantités a et b n'auraient point de plus grande mesure commune, *assignable* d'après les instruments les plus précis pour le mesurage de a par b. Dans ce cas, comme n est compris entre 2 et 3, on peut du moins toujours concevoir deux fractions, aussi peu différentes qu'on voudra, entre lesquelles le rapport cherché n soit compris : donc il existe et peut se calculer, avec une approximation suffisante.

On sait d'ailleurs que dans $n^2 = 7$, le nombre n est *inexprimable*, ou comme on dit, *irrationnel; n* est une fraction dont les deux termes sont *infinis*, et par conséquent a et b n'ont d'autre *mesure commune* qu'une quantité *infiniment petite*.

Enfin, puisque deux quantités continues, de même nature, ont toujours un rapport, *exprimable* ou non, elles ont aussi toujours une mesure commune *assignable* ou *inassignable ;* et c'est dans ce dernier cas qu'il faut dire que les deux quantités proposées sont *incommensurables entre elles*.

Observons encore que le rapport le plus facile à déterminer est celui des grandeurs *semblables*, pouvant être parfaitement *égales;* et si elles sont dissemblables, mais *équivalentes* entre elles, leur rapport est 1, le plus simple de tous les rapports. Le rapport entre deux choses, de même nature, est indépendant de leurs *formes*

particulières et porte uniquement sur leurs *grandeurs relatives*. La *similitude* de deux quantités géométriques dépend à la fois des rapports de *grandeurs* et de *positions* de leurs parties correspondantes; lesquelles sont parfaitement *analogues* deux à deux. Aussi l'analogie joue-t-elle un rôle fort important, non-seulement dans la *similitude* de deux choses ; mais aussi dans leur *ressemblance*.

Les Proportions.

I. La mesure ou la comparaison des quantités rend souvent indispensable l'emploi des *proportions*, exprimant l'égalité de deux rapports. On sait que mesurer une quantité, c'est chercher le rapport de cette quantité à l'unité constante de même nature ; c'est diviser la chose à mesurer en parties égales à l'unité ou en une fraction déterminée de cette unité. Or, cette division est rarement praticable en opérant sur la quantité proposée; et ce n'est par exemple, qu'*indirectement* que l'on peut trouver les valeurs numériques des longueurs curvilignes, des aires et des volumes, comme pour la circonférence, la surface d'un *bois* ou d'un *étang*, l'étendue d'une *salle*, etc.

Dans ces différents cas, on tâche de remplacer le rapport cherché par un autre égal, *simple* ou *composé*, plus facile à déterminer exactement. Pour les grandeurs continues, l'opération est ramenée, au moyen des théories géométriques, à la mesure *directe* des droites et des arcs circulaires, c'est-à-dire aux usages de la règle et du compas ou des instruments qui les remplacent sur le terrain.

II. Considérons les quatre quantités a, b, c, d, de même nature deux à deux, et supposons-les telles qu'en mesurant a par b, on mesure en même temps c par d, et réciproquement. Les deux nombres résultants seront donc absolument les mêmes; et si $c = dn$, n étant un rapport, *exprimable* ou non, on aura aussi nécessairement $a = bn$. Donc si le rapport n de c à d est le plus facile à déterminer exactement, il faudra s'en servir pour calculer *indirectement* le rapport égal de a à b, et l'on aura ainsi $a = bn$; de sorte que a sera mesuré et exprimé par b, bien qu'on n'ait mesuré réellement que c par d. On voit l'utilité de la théorie des rapports égaux.

De là naissent les *proportions;* car ayant ici $a : b = n$ et $c : d = n$, il en résulte $a : b = c : d$; c'est une *proportion*, qu'on écrit aussi $a : b :: c : d$, en énonçant a *est à* b *comme* c *est à* d. Cela signifie que *a s'obtient avec* b *absolument comme* c *se trouve avec* d; vu que si le rapport commun n vaut 17 *onzièmes*, par exemple, a sera les 17 onzièmes de b absolument comme c est aussi les 17 onzièmes de d.

III. Réciproquement, si l'on sait que a s'obtient avec b absolument comme c se trouve au moyen de d, n'importe d'ailleurs par quelles opérations, *graphiques* ou *numériques*, pourvu qu'elles soient respectivement les mêmes, dans les deux cas, il s'ensuivra que si $a = bn$, n étant un rapport, rationnel ou non, on aura aussi nécessairement $c = dn$. Car si l'on pouvait avoir $c = dp$, p étant un nombre différent de n, il est clair, d'après la notion du rapport, que c ne s'obtiendrait point avec d absolument comme a avec b; contrairement à l'hypothèse. On a donc simultanément $a = bn$ et $c = dn$; d'où il vient $a : b :: c : d$.

Donc pour établir la proportion entre quatre quantités, nécessairement de mêmes natures et parfaitement *analogues* deux à deux, *il suffit de bien constater, d'après les définitions et les constructions, que la première grandeur se trouve à l'aide de la seconde absolument comme la troisième au moyen de la quatrième;* chose souvent très-facile.

IV. Telle est essentiellement la *méthode analogique.* Cette méthode est si simple et si naturelle, elle tient si immédiatement aux premières notions, qu'il faut s'étonner qu'on ne l'ait pas encore appliquée, bien explicitement, en géométrie. Cependant son emploi y présenterait les avantages de clarté, de facilité et de rigoureuse exactitude; non-seulement pour la *proportionnalité* des lignes, des surfaces et des volumes, limités de toutes parts; mais aussi pour leur *mesurage* et leur *construction.* C'est ce que nous allons développer, par divers exemples choisis.

V. Considérons d'abord les deux triangles quelconques ABC et A′B′C′ et supposons qu'on ait à la fois l'angle $A = A'$ et la proportion $AB : A'B' :: AC : A'C'$. Il est clair que le côté $AB = AC \times n$ et le côté $A'B' = A'C' \times n$; de sorte que AB se trouve avec AC absolument comme A′B′ avec A′C′. Mais AB s'obtient par les deux angles A et C, tracés aux extrémités de AC, tandis que A′B′ se trouve par les deux angles A′ et C′, tracés aux extrémités de A′C′; donc puisque l'angle $A = A'$ et que AB se trouve au moyen de AC absolument comme A′B′ au moyen de A′C′, il faut que l'angle $C = C'$. On verra de même que l'angle $B = B'$; donc *deux triangles qui ont un angle égal compris entre côtés proportionnels, sont équiangles et les angles opposés aux côtés formant un rapport, sont égaux.*

Supposons maintenant l'angle $A = A'$ et l'angle $B = B'$: les deux angles A et B, qu'il faut tracer aux extrémités de AB, pour avoir AC ou BC, il faut donc aussi les tracer aux extrémités de A′B′, pour avoir A′C′ ou B′C′; donc A′C′ ou B′C′ se trouve avec A′B′ absolument comme AC ou BC se trouve avec AB. Si donc $AC = AB \times n$ et $BC = AB \times p$, on aura aussi nécessairement $A'C' = A'B' \times n$ et $B'C' = A'B' \times p$; donc en divisant, il vient

$$AC : A'C' :: AB : A'B' :: BC : B'C';$$

et de plus, en vertu du cas précédent, l'angle $C = C'$. Ainsi, non-seulement *deux triangles sont équiangles dès qu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun;* mais de plus, *dans deux triangles équiangles les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels.* Réciproquement, *la proportionnalité des côtés de deux triangles entraîne l'égalité des angles opposés.* Car alors AC se trouvant avec AB absolument comme $A'C'$ avec $A'B'$, il faut qu'on ait à la fois l'angle $A = A'$ et l'angle $B = B'$; d'où l'angle $C = C'$.

Ces quatre théorèmes suffisent pour établir complètement la théorie des *droites proportionnelles ;* d'où résultent toutes les *relations numériques* dans les triangles. Mais l'analogie conduit immédiatement à la propriété de la droite divisant en deux parties égales, soit l'angle du sommet d'un triangle, soit l'angle extérieur supplémentaire. Ces deux bissectrices étant perpendiculaires entre elles, on en déduit les formules *logarithmiques* les plus simples pour résoudre les triangles, et toutes les formules de la trigonométrie rectiligne, d'après le théorème, auquel la méthode analogique, elle-même, conduit immédiatement, savoir: *la projection orthogonale de toute droite donnée est le produit de celle-ci par le cosinus numérique de l'angle compris.*

Considérons au moins trois parallèles coupant deux droites quelconques; soient $a, b, c, d,\ldots$, les parties de la première droite qui répondent aux parties $a', b', c', d',\ldots$, de la seconde : les angles internes-externes sur celle-ci étant égaux, il s'ensuit que a se trouve avec a' absolument comme b avec b', comme c avec c' et comme d avec d'; donc

$$a : a' = b : b' = c : c' = d : d'.... \quad (1)$$

Réciproquement, *cette suite étant vérifiée, les sécantes sont parallèles entre elles*, en vertu de l'analogie.

Supposons que la suite (1) subsiste lorsque, les deux droites proposées n'étant point parallèles, il y a au moins quatre sécantes non parallèles entre elles, ni deux à deux, et ne se coupant pas en un même point : la première sécante est donc divisée, par les autres, en parties b'', c'' et d'', lesquelles répondent aux parties b, c et d de la première droite proposée. Or, la suite (1) est indépendante de l'angle des deux droites; elle doit donc s'appliquer encore lorsque la seconde vient se placer sur la première sécante. Mais alors il y a une sécante de moins et b', c', d', deviennent respectivement b'', c'', d''; donc puisque les deux systèmes obtenus en supprimant successivement la pre-

mière sécante et la seconde droite, sont complètement analogues, on a

$$b : b'' = c : c'' = d : d''.$$

Ce théorème, dû à M. Brasseur (*Applications des projections cotées* p. 6), cesserait d'exister, 1° si les sécantes étaient parallèles entre elles : 2° *si les deux droites proposées étaient parallèles ;* car alors *les sécantes se couperaient en un même point*, toujours en vertu de l'analogie.

VI. Soient A et A′ deux angles au centre d'un même cercle, B et B′ les arcs compris par leurs côtés : mesurer B par B′, c'est mesurer en même temps A par A′, et réciproquement. Si donc $B = n\ B'$, on aura aussi $A = n\ A'$; d'où $A : A' = B : B'$.

Il est évident que la circonférence c se trouve avec son rayon r absolument comme la circonférence c' se trouve avec son rayon r'. Si donc $c' = r' \times n$, n étant le rapport des *longueurs* c' et r', on aura aussi nécessairement $c = r \times n$; d'où il vient $c : c' = r : r' = 2r : 2r'$.

De même, si les deux arcs a et a', de rayons r et r', sont terminés aux côtés d'un même angle au centre, leurs cordes étant c et c', leurs flèches f et f' ; il est évident que chacune des longueurs a, c, f, se trouve avec r absolument comme chacune des longueurs correspondantes a', c', f', se trouve avec r', et que par suite $a : a' = c : c' = f : f' = r : r'$.

Soient P et P′ deux parallélogrammes ayant un angle supplémentaire et par conséquent un angle égal ; soient a et b les côtés inégaux du premier parallélogramme, a' et b' les côtés du second : P et P′ étant équiangles, soit R le parallélogramme de même angle que celui commun à P et à P′, ayant ses deux côtés égaux l'un à a' et l'autre à b.

Cela posé, puisque P et R ont un même angle et le même côté b, il est clair que mesurer P par R, c'est mesurer en même temps a par a', et réciproquement ; donc $P : R = a : a'$; d'où $P = R\,(a : a')$. On verra de même que $R = P'\,(b : b')$; d'où en substituant et divisant par P′, il vient

$$P : P' = (a : a')\ (b : b').$$

Ainsi *le rapport de deux parallélogrammes, et par conséquent de deux triangles, ayant un angle égal ou supplémentaire, est le produit des rapports des côtés de cet angle qui se correspondent dans les deux figures.*

Ce théorème fournit plusieurs corollaires et immédiatement l'expression de l'*aire* du rectangle P, dont a et b sont les deux dimensions. Car soit s l'*unité superficielle*, carré fait sur l'*unité linéaire* u ; on aura

$$P = s\,(a : u)\,(b : u).$$

VII. Soit F une aire plane quelconque et F′ sa *projection* sur un plan non parallèle au premier. Imaginons un troisième plan perpendiculaire à leur intersection et coupant F et F′ suivant les droites *inscrites* d et d', dont l'angle est celui x de F avec F′. Les perpendiculaires au second plan, abaissées des extrémités de d, déterminent d', tandis que les perpendiculaires à ce second plan, abaissées de tous les points du contour de F, déterminent F′; il est donc évident que F′ se trouve au moyen de F absolument comme d' se trouve au moyen de d, et ainsi $F' : F = d' : d = \cos x$; d'où $F' = F \cos x$.

Considérons les deux tétraèdres $SABC = t$ et $S'A'B'C' = t'$, dont S et S′ sont les sommets, ABC et A′B′C′ les bases. Les deux tétraèdres t et t' sont déterminés complètement dès que les deux trièdres A et A′ sont donnés, aussi bien que les arêtes qui les comprennent; et il en est de même des deux prismes triangulaires p et p', construits sur ces trièdres et leurs arêtes. Or, le prisme p se trouve en menant, par les points B et C, deux droites égales et parallèles à A S; de même, le prisme p' se trouve en menant, par les deux points B′ et C′, deux droites égales et parallèles à A′ S′. Il est donc évident que p' se trouve au moyen de t' absolument comme p se construit avec t. Si donc $p = t\,n$, on aura aussi $p' = t'\,n$ et par conséquent

$$t : t' :: p : p'.$$

Par cette proportion, ainsi démontrée clairement, simplement et rigoureusement, le rapport des volumes de deux tétraèdres quelconques est ramené à celui de deux prismes triangulaires.

La comparaison des aires et des volumes est conséquence du mesurage; mais il est parfois plus clair et plus direct d'opérer sur les deux termes du rapport. Par exemple, soit $SABC = t$ le tétraèdre dont S est le sommet et A B C la base; soit p le prisme triangulaire construit sur le trièdre A et ses trois arêtes; la seconde base de ce prisme étant SED, soit t' le tétraèdre ADSE : le tétraèdre t étant donné, il en résulte le prisme p en menant AD et CE égales et parallèles à BS; de même, t' étant donné, il en résulte le prisme p en menant EC et SB égales et parallèles à DA. Il est donc évident que le prisme p se trouve avec t' absolument comme avec t; donc si $p = t\,m$, on aura aussi nécessairement $p = t'\,m$, et ainsi t vaut t'.

Pour la pyramide quadrangulaire SACDE, dont S est le sommet et le parallélogramme ACDE la base, on verra encore, par la méthode analogique, que les deux tétraèdres $SADE = t'$ et $SACE = t''$ sont équivalents. Or, $p = t + t' + t''$; donc $p = 3\,t$ et $t = \frac{1}{3}\,p$.

La méthode analogique étant conséquence immédiate de la pro-

priété fondamentale du rapport et de la définition des grandeurs, qu'il faut comparer entre elles, est complètement exacte ; et il y aurait certainement plusieurs avantages à substituer cette méthode, dans diverses recherches géométriques, à la *réduction à l'absurde*, rigoureuse sans doute, mais qui souvent laisse beaucoup à désirer pour la clarté.

VIII. Il est en géométrie un grand nombre de proportions, que la méthode analogique fournit immédiatement ; mais il en est aussi plusieurs où la *méthode infinitésimale*, alors la *méthode des parties égales*, est plus simple encore, ou du moins plus claire que la précédente. C'est que la méthode infinitésimale n'est au fond que l'analogie, rendue plus évidente ; car décomposant la grandeur proposée dans ses parties les plus ténues, pour découvrir la *loi* qui les unit, la méthode infinitésimale peint, en quelque sorte, à la pensée, la *génération* de cette grandeur. Les éléments auxiliaires de cette génération sont des parties *infiniment petites*, propres à établir la *continuité*, et qui disparaissent nécessairement du résultat final des raisonnements. Voilà pourquoi la méthode infinitésimale, masquée souvent par de longues et inutiles réductions à l'absurde, domine dans les traités de géométrie ; mais il serait plus simple et surtout plus clair d'y employer, bien explicitement, l'analogie ou les infiniment petits, selon la question à traiter et où il faut passer du *commensurable* à l'*incommensurable.*

Soient a et b deux quantités continues de même nature : elles ont nécessairement un rapport, rationnel ou non ; elles ont donc aussi une mesure commune x, assignable ou non, finie ou infiniment petite, d'un ordre quelconque ; de sorte qu'on a $a = m\,x$ et $b = n\,x$, m et n étant deux nombres entiers, connus ou inconnus, finis ou infinis. Divisant a par b, il est clair qu'on aura successivement

$$a : b = m\,x : n\,x = \left(n\,x \times \frac{m}{n}\right) : n\,x = \frac{m}{n} = m : n.$$

Le rapport reste donc absolument le même, soit qu'on supprime le facteur continu commun à ses deux termes, soit qu'on les divise par une quantité de même nature qu'eux ; ce qui ramène le rapport de deux quantités continues à celui de deux nombres abstraits.

Cela posé, si les deux quantités c et d, aussi de même nature, sont liées aux deux premières a et b, de telle sorte qu'on ait aussi $c = m\,y$ et $d = n\,y$, on aura de même $c : d = m\,y : n\,y = m : n$. Et comme déjà $a : b = m : n$, il en résulte $a : b :: c : d$.

Donc *pour établir la proportion entre quatre grandeurs* a, b, c, d, *il*

faut seulement démontrer que si a *et* b *sont divisées en* m *et* n *parties égales à* x, c *et* d *seront aussi divisées en* m *et* n *parties égales à* y; chose facile sans doute, mais qui exige souvent des propositions préliminaires.

Telle est la *méthode des parties égales*, par laquelle la proportion est rigoureusement démontrée; néanmoins on distingue ordinairement deux cas, savoir celui où les deux quantités a et b sont *commensurables* entre elles et celui où elles ne le sont pas. Mais on ne dit point ce qu'on entend par quantités *incommensurables entre elles :* n'ont-elles point de *mesure commune*? alors elles n'auront pas non plus de *rapport*; puisque, dès que a et b ont un rapport, elles ont aussi nécessairement une mesure commune, du moins infiniment petite, d'un certain ordre inconnu; et si a et b n'ont point de rapport, il n'y a pas à s'en occuper.

Si en disant que a et b sont incommensurables entre elles, on entend qu'elles n'ont d'autre mesure commune qu'une grandeur *inassignable*, on rentre dans le premier cas; et la réduction à l'absurde, employée pour n'opérer que sur des quantités *finies*, mises sous les yeux, est absolument inutile. Elle a d'ailleurs l'inconvénient d'être longue et fort obscure, puisqu'on n'a pas défini clairement les quantités incommensurables, et que si l'on avait cette définition, qui fait rentrer le second cas dans le premier, il n'y aurait plus rien à démontrer.

En général, le rapport $a : b$ existe nécessairement; mais il est exprimable ou inexprimable. De même, les deux quantités a et b ont une mesure commune, assignable ou non, finie ou infiniment petite d'un ordre quelconque. Or, cette mesure commune *inassignable*, toujours inconnue et indéterminée, toujours moindre que la plus petite partie imaginable de l'unité employée, existe aussi bien que le rapport irrationnel, auquel elle est liée.

IX. Maintenant pour donner une application remarquable de la méthode des parties égales, cherchons le rapport de deux prismes quelconques P et P', ayant leurs bases b et b' sur un même plan; deux arêtes latérales correspondantes a et a' étant sur la même droite.

Soit R le prisme dont b est la base et a' l'arête latérale sur a; soit x la mesure commune, assignable ou non, des deux bases b et b'; on aura donc $b = m\,x$ et $b' = n\,x$; d'où $b : b' = m : n$. Soit y le prisme dont x est la base et dont les arêtes latérales sont égales et parallèles à l'arête a', commune aux deux prismes R et P'. Il est clair que R et P' renferment m et n prismes, tous égaux à y, comme

ayant bases égales à x et arêtes latérales égales et parallèles à a'; donc $R = m\,y$ et $P' = n\,y$; d'où $R : P' = m : n$. Ainsi l'on a $R : P' = b : b'$ et $R = P'\,(b : b')$.

De même, les deux prismes P et R, ayant la base b commune et les arêtes latérales a et a' en ligne droite, on verra, comme dans le cas précédent, que $P = R\ (a : a')$. Substituant donc la valeur de R et divisant par P', il viendra, pour l'expression du rapport cherché,

$$P : P' = (a : a')\,(b : b').$$

Ce théorème fournit plusieurs conséquences utiles à la comparaison des volumes. Supposons d'abord que P et P' soient deux parallélipipèdes ou deux prismes triangulaires, ayant un trièdre commun : les deux bases b et b' auront donc aussi un angle commun, compris par les côtés c et d de b et par les côtés c' et d' de b'; d'où $b : b' = (c : c')\,(d : d')$. Dans ce cas donc on aura

$$P : P' = (a : a')\,(c : c')\,(d : d').$$

Cette expression du rapport P : P', des deux parallélipipèdes ou des deux prismes triangulaires P et P', ne change aucunement lorsque les deux trièdres A et A', de P et de P', au lieu d'être égaux, sont symétriques ou valent ensemble un même coin. Pour les deux cubes ou les deux rhomboèdres P et P', dont les trièdres A et A' sont égaux, il vient $P : P' = (a : a')^3$.

Enfin, si P est le parallélipipède rectangle dont a est la hauteur, b la base, c et d les deux dimensions de celle-ci; et si de plus, P' est le cube v fait sur l'unité linéaire u, chaque face de l'unité de volume v étant le carré s, unité superficielle, il est clair que la mesure de P aura les deux expressions :

$$P = v\,(a : u)\,(c : u)\,(d : u) \text{ et } P = v\,(b : s)\,(a : u);$$

et si l'on sous-entend les unités v, s et u, comme on le fait ordinairement, pour simplifier, il viendra $P = a\,c\,d$ et $P = b\,a$.

Principe d'analogie.

I. Rien ne paraît plus facile à concevoir que le *mesurage* des quantités continues; mais cette opération présente souvent de grandes difficultés : pour l'effectuer avec une exactitude suffisante, il faut *diviser* la quantité proposée en parties égales, de telle sorte qu'elle soit un *multiple* ou une *fraction* de l'unité invariable de même nature.

Or, lorsqu'on peut opérer *directement* sur la chose à mesurer, ce multiple et cette fraction ne s'obtiennent jamais que par approximation, et la difficulté est de bien connaître la *limite supérieure* de l'erreur commise, afin de savoir si elle peut se négliger. Mais parmi les grandeurs géométriques, il n'est guère que les longueurs rectilignes que l'on puisse ainsi mesurer; et encore faut-il que la droite soit abordable dans toute son étendue limitée : si elle est *inaccessible* ou si la grandeur à mesurer est un *arc circulaire*, une *surface* ou un *volume*, le mesurage ne peut se faire qu'*indirectement*, à l'aide de grandeurs *auxiliaires* dont on sache calculer les valeurs numériques, comme la *base* et la *hauteur* dans le parallélogramme, le triangle, le prisme ou le cylindre, la pyramide ou le cône.

Ces grandeurs auxiliaires devant fournir un nombre égal à celui que l'on cherche, mais plus facile à déterminer exactement, sont les *éléments générateurs* de ce nombre, ou plutôt de la chose à mesurer ; car ils la déterminent complètement, puisqu'ils donnent exactement le nombre qui la représente. C'est ainsi que l'*ouvrier* et le *temps* sont les éléments générateurs de l'*ouvrage* et en déterminent la grandeur. Car a ouvriers, faisant chacun la quantité c de l'ouvrage proposé, en une journée, produisent nécessairement, en b journées, un ouvrage x, dont la grandeur est exprimée numériquement par $x = c \times a \times b$.

II. Deux quantités dont le mode de *génération* est le même, sont nécessairement comprises dans la même *définition générale*, puisque définir une chose, c'est la nommer et la décrire ; et ainsi, par exemple, le parallélogramme et le rectangle, le prisme et le cylindre, la pyramide et le cône, ont à la fois même mode descriptif et même définition générale. Les deux quantités proposées ont donc leurs éléments générateurs parfaitement *analogues*; lesquels doivent recevoir les mêmes dénominations respectives, pour rendre l'*analogie* plus évidente et rappeler qu'ils jouent les mêmes rôles dans les deux générations. De là, par exemple, le nom de *base* donné à des choses de natures différentes, comme la base du triangle et la base du prisme, la base du parallélogramme et la base du cône, etc.

Puisque le mode descriptif est absolument le même, pour les deux grandeurs proposées, les modes de génération des deux nombres, qui les représentent complètement, doivent aussi être les mêmes, au moyen des mesures des éléments générateurs analogues; or, cela exige que la mesure de l'une des deux grandeurs se trouve, par ses éléments générateurs, absolument comme la mesure de l'autre grandeur se trouve par les siens. En un mot, *deux grandeurs comprises dans la même définition générale, se mesurent absolument de la même manière, d'après une règle constante.*

III. Tel est le *principe d'analogie*, dont l'emploi explicite rend la théorie du mesurage la plus simple et la plus claire possible. Ce principe est tellement fondamental que, sans lui, il n'y aurait en mathématique, ni définition, ni règle, ni formule générale : c'est au fond le *principe des fonctions*, puisque toutes les grandeurs comprises dans la même définition générale, sont fonctions *semblables* de leurs éléments générateurs. C'est aussi le *principe de généralisation* en Algèbre, où il étend la formule à tous les problèmes *analogues*, à toutes les grandeurs ayant le même mode de génération ; car les valeurs particulières des éléments générateurs ne sauraient changer aucunement le rôle qu'ils jouent dans la génération et par conséquent dans la formule, expression numérique du résultat de cette génération. De sorte que la formule étant calculée pour les valeurs *entières* et *indéterminées* des lettres qui la composent, elle doit s'appliquer pour toutes les valeurs imaginables de ces lettres, *réelles* ou *imaginaires*, *positives* ou *négatives*.

C'est en effet, par extension et par analogie qu'on établit le calcul des *exposants*, d'une nature quelconque, aussi bien que toutes les *opérations* de l'Algèbre et la théorie des *symboles négatifs* ou *imaginaires*. C'est par analogie et à l'aide de la notation des fonctions qu'Euler étend la formule du binome à tous les cas réels de l'exposant ; tandis que le principe d'analogie démontre immédiatement la généralité complète de cette formule. La méthode des *coefficients indéterminés* est-elle autre chose que le principe d'analogie ? La méthode infinitésimale elle-même n'est-elle pas l'expression la plus claire de la génération de certaines grandeurs ?

Tout le monde reconnaît le pouvoir de l'analogie et en fait usage, dans l'étude des sciences, pour la simplifier ; tout le monde sait que c'est la définition et par conséquent la génération de chaque grandeur qui doit en fournir les propriétés et la mesure ; et cependant on se sert de longues et pénibles réductions à l'absurde, fondées encore sur l'analogie, pour parvenir à certaines valeurs numériques, que le principe d'analogie fournit immédiatement. Par ce principe, en effet, la question du mesurage de chaque sorte de grandeur est ramenée à savoir mesurer la plus simple de toutes celles comprises dans la même définition générale, et cela au moyen des mesures des éléments générateurs de cette plus simple grandeur, comme nous en donnerons bientôt plusieurs exemples remarquables.

IV. C'est par la notation des fonctions et en se fondant sur l'*homogénéité*, pour ne conserver que les éléments générateurs dans l'expression du nombre cherché, que Legendre démontre les théorèmes fondamentaux de la géométrie. La méthode qu'il emploie à cet effet, quoique fort

exacte et fort remarquable, a été l'objet de plusieurs objections très graves, qui n'auraient pas lieu, nous semble-t-il, si l'on procédait comme il suit:

Soient ABC et A'B'C' deux triangles quelconques: il est d'abord évident que l'angle C se trouve en traçant les deux angles A et B, absolument comme l'angle C' s'obtient en traçant les deux angles A' et B'; et cela quelles que soient les longueurs des côtés AB et A'B'. Si donc l'angle $A = A'$ et l'angle $B = B'$, il faudra nécessairement que le troisième angle C soit égal au troisième C'.

Ensuite l'expression inconnue de l'angle C, au moyen des deux A et B, est indépendante de la longueur A B, puisque la construction subsiste quelle que soit cette longueur; l'expression de C ne change donc point quand on suppose $AB = A'B'$. Mais alors les deux triangles A B C et A' B' C' peuvent se confondre en un seul, aussi bien que les deux angles C et C'; donc avant de supposer $AB = A'B'$, on avait $C = C'$.

V. De là résulte aisément $A + B + C = 2$ angles droits, et par suite la *théorie des parallèles.* Mais cette théorie elle-même laisse beaucoup à désirer, sous le rapport de la clarté et de la simplicité, comme toutes celles fondées sur la définition de l'angle, ordinairement en usage. On peut sans doute appeler *angle* la quantité plus ou moins grande, dont deux droites qui se coupent sont écartées l'une de l'autre, quant à leur position; mais cette quantité plus ou moins grande, quelle est-elle, si ce n'est la portion plane infinie comprise entre les deux droites, elles mêmes infinies? La définition en usage ne nous apprend donc pas clairement ce que c'est que l'angle; et delà vient la difficulté de la théorie des parallèles, basée sur cette définition.

Si l'on regarde l'angle tel qu'il est en effet : une *portion plane infinie*, non-seulement la théorie des parallèles sera simple, claire et complète; mais elle devra servir à démontrer les théorèmes fondamentaux, à l'aide de l'analogie et de la méthode infinitésimale, comme étant alors l'origine la plus claire de toutes les vérités géométriques. Cette théorie, fondée sur la nature infinie de l'angle, a pour base la proposition que voici et sa réciproque :

Deux droites finissent toujours par se rencontrer lorsqu'elles font avec une même troisième, deux angles A et B tels que l'externe A soit plus grand que l'interne B correspondant.

En effet, dire que l'angle A est plus grand que l'angle B, c'est dire que la portion plane infinie A est plus grande que la portion plane infinie B; l'angle A ne peut donc pas demeurer contenu dans l'angle B et en doit sortir, tôt ou tard. Or, l'angle A ne peut sortir de l'angle B, ni par la troisième droite, limite commune, ni dans le sens de l'*ouver-*

ture, puisque dans ce sens les deux angles vont à l'infini et l'un ne saurait dépasser l'autre ; donc l'angle A ne sort de l'angle B que par les seconds côtés, de directions différentes, lesquels se coupent nécessairement.

Cette démonstration ne doit rien laisser à désirer, si les définitions de la droite, du plan et de l'angle sont bien comprises.

VI. Voyons maintenant quelques applications du principe d'analogie à la théorie du mesurage des grandeurs. Et d'abord soit S l'aire du secteur circulaire, dont r est le rayon, a l'arc et c la corde. Soit T le triangle isocèle, ayant c pour base, le centre pour sommet et h pour hauteur : le pied de h est donc le milieu de c. Or, l'arc a étant tracé et par suite sa corde c, on trouve le centre, sommet commun à S et à T, en élevant sur c et par son milieu, la perpendiculaire passant aussi par le milieu de a, puis en portant sur elle, 1° à partir de c, la longueur h pour le triangle; 2° à partir de a, la longueur r pour le secteur. Il est donc évident que S se trouve avec a et r absolument comme T s'obtient avec c et h; donc puisque $T = \frac{1}{2}\, c\, h$, les unités s et u étant *sous-entendues*, on a aussi nécessairement $S = \frac{1}{2}\, a\, r$.

Cette expression, à laquelle on parvient aussi, avec facilité, en observant que S est la somme d'une infinité de triangles isocèles infiniment petits, conduit immédiatement à l'aire $\pi\, r^2$ du cercle dont r est le rayon.

L'aire E de l'*ellipse* est déterminée complètement quand on connaît ses deux demi-axes a et b, de longueur et de position; et si $b = a$, l'aire E devient celle du cercle. Ainsi l'aire E de l'ellipse s'exprime par les mesures de ses demi-axes a et b, absolument comme l'aire E′ du cercle, par les mesures de ses deux rayons a perpendiculaires. Or, $E' = \pi\, a\, a$; donc $E = \pi\, a\, b$.

D'ailleurs l'aire E étant nulle, soit par $a = o$, soit par $b = o$, on doit poser $E = k\, a\, b$, k étant un nombre abstrait indépendant de a et de b. Ce nombre ne change donc pas quand on fait $b = a$; mais alors l'aire E est celle E′ du cercle de rayon a et l'on a simultanément $E' = k\, a^2$ et $E' = \pi\, a^2$; d'où $k = \pi$. Donc puisque le nombre k n'a pas changé, il était égal à π et l'on a $E = \pi\, a\, b$.

VII. Les coordonnées étant rectangulaires, soit A l'aire limitée par la courbe

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2.$$

1° Si $b = o$, d'où $x^2 + y^2 = \pm\, a\, x$, l'aire A est la somme de deux cercles, ayant chacun a pour diamètre ; donc $A = \frac{1}{2}\, \pi\, a^2$.

2° Si $a = o$, les deux cercles ont chacun b pour diamètre; d'où $A = \frac{1}{2}\, \pi\, b^2$.

3° Si $b = a$, d'où $x^2 + y^2 = a^2$, il vient $A = \pi a^2$.

4° Pour satisfaire à ces trois cas particuliers, il faut nécessairement que la formule, expression de l'aire A cherchée, soit

$$A = \frac{1}{2}\pi (a^2 + b^2).$$

On parvient à cette formule remarquable, par la méthode infinitésimale et d'après l'*équation polaire* de la courbe proposée ; mais les calculs sont plus compliqués.

Observons toutefois que le principe d'analogie ou des fonctions ne suffirait pas pour faire découvrir l'expression de l'aire A limitée par la *lemniscate*

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 - b^2 y^2.$$

Dans ce cas, il faut recourir à l'équation polaire; et désignant par ω l'arc numérique, de rayon 1, tel qu'on ait $c^2 = a^2 + b^2$ et $c \sin \omega = a$, d'où $c \cos \omega = b$, on trouve, par une *série trigonométrique*,

$$A = \omega (a^2 - b^2) + a\, b.$$

Cette expression remarquable devient $A = a^2$ ou bien $A = a^2 \sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi a^2$, suivant que $b = a$ ou que $b^2 = 3\, a^2$.

VIII. Tout prisme ou tout cylindre, droit ou oblique, est déterminé complètement et son volume P peut se construire, dès que sa base b quelconque et sa hauteur h, menée d'un sommet, sont données de grandeur et de position fixe. De plus, en vertu de la définition générale, il est évident que P se trouve avec b et h absolument comme le parallélipipède rectangle P′ s'obtient avec sa base b' et sa hauteur h' ; donc puisque $P' = b'\, h'$, on a aussi nécessairement $P = b\, h$; ce qui signifie que

$$P = v\ (b : s)\ (h : u).$$

De même, si P est le volume d'une pyramide ou d'un cône quelconque, droit ou oblique, de base b et de hauteur h ; tandis que P′ serait l'une des six pyramides régulières et égales qui composent le cube de base b' et de hauteur $2\, h'$, d'où $P' = \frac{1}{3} b'h'$; on aura, en vertu de l'analogie,

$$P = \frac{1}{3} b\, h \text{ ou } P = v \times \frac{1}{3} (b : s)\ (h : u).$$

IX. Plus généralement, soit G une grandeur géométrique quelconque, aire ou volume ; soit h sa hauteur et b sa base, ligne ou aire plane limitée. Supposons la grandeur G telle qu'en la coupant par des lignes ou des plans parallèles à la base b, cette base et chaque section résultante soient entre elles comme les puisssances m ièmes de leurs distances au sommet, extrémité de h, et cherchons, d'après cette proportion, l'expression de la grandeur G.

On peut toujours supposer que les lignes ou les plans parallèles à la base b divisent G en *tranches*, toutes de même épaiseur très-petite; et comme G est la somme de ces tranches, il est clair, à cause de l'analogie complète, que si l'on sait calculer cette somme pour une valeur particulière de m, on saura la calculer pour une valeur quelconque. De plus, la grandeur G est déterminée complètement dès que la base b et la hauteur h étant données, de valeur et de position, on connaît l'exposant m; de sorte que b, h et m sont les éléments générateurs de G. Or, pour le triangle, où $m = 1$, on a

$$G = \tfrac{1}{2} b\, h = b\, h : 2 = b\, h : (1 + 1) = bh : (1 + m).$$

Pour le parallélipipède rectangle, où $m = 0$, on sait que

$$G = b\, h = b\, h : (1 + 0) = b\, h : (1 + m).$$

Et puisque les valeurs particulières de m ne sauraient changer aucunement le rôle que m joue dans la formule, expression de G, il s'ensuit que, quel que soit m, entier ou fractionnaire, on aura toujours

$$G = b\, h : (1 + m).$$

1° Cette formule, qu'on démontre aussi, moins simplement, par la méthode infinitésimale, fournit les théorèmes connus sur le mesurage des volumes de tous les cylindres et de tous les cônes, aussi bien que sur les surfaces latérales des cylindres, droits et obliques, et des cônes droits.

2° Pour le *segment* G dans la *parabole* $y = a\, x^m$, où $b = 2\, y$ et $h = x \sin \theta$, en désignant par θ l'angle entre les axes des x et des y, on a

$$G = 2x\, y \sin \theta : (1 + m).$$

De sorte que, dans la parabole *ordinaire*, représentée par $y^2 = 2px$ et où l'exposant m vaut $\frac{1}{2}$, le segment G, dont $2\, y$ est la corde donnée, est les deux tiers du parallélogramme *circonscrit*, et l'on a $G = \frac{4}{3} x\, y \sin \theta$.

3° Les coordonnées étant rectangulaires et G désignant le volume du *segment*, depuis $x = o$ jusqu'à $x = h$, dans le *paraboloïde elliptique* $M\, y^2 + N\, z^2 = R\, x$, on trouve $m = 1$ et

$$G = \tfrac{1}{2} \pi\, h^2\, R : \sqrt{(MN)};$$

c'est le demi-cylindre, de hauteur h et de base elliptique. Si donc $h = 4$ et $y^2 + 3\, z^2 = 16\, x$, il vient $G = 128\, \pi \sqrt{\tfrac{1}{3}}$.

4° Pour le *paraboloïde de révolution* autour de l'axe des y, dans y^2.

$= 2px$, on a $y = h$, $b = \pi h^4 : 4p^2$, $m = 4$ et $G = \frac{1}{5} b\, h$; c'est le cinquième du cylindre de même base et de même hauteur.

5° Si G désigne le volume du segment limité par le plan des yz, le plan $z = h$ et la surface $My^2 - Nz^2 = Rx$, on trouve, par des transformations fort simples,

$$MR\, b = \tfrac{2}{3} h^3 N \sqrt{(2\, MN)},\ m = 3 \text{ et } G = \tfrac{1}{4} bh;$$

c'est le quart du prisme de hauteur h et de base équivalente à b. Si donc $h = 6$, dans le *paraboloïde hyperbolique* $y^2 - z^2 = 8x$, il vient $G = 18\sqrt{2}$.

6° Pour le *conoïde droit*, b est la base perpendiculaire au plan directeur et h est la hauteur, distance de b à la droite D, perpendiculaire à ce plan; de sorte que le pied de D est le *sommet* de G. Or, si b est un triangle, on démontre aisément que $m = 1$; donc en vertu de la génération de G, qui reste la même, quelle que soit la base b, aire plane, rectiligne, mixte ou curviligne, on aura toujours $m = 1$ et $G = \frac{1}{2} b\, h$; c'est la moitié du prisme ou du cylindre, ayant même base b et même hauteur h que le conoïde proposé.

X. Considérons encore quelques *corps de révolution*. Soit d'abord S l'aire d'un secteur circulaire, r son rayon, a son arc et c sa corde, base du triangle isocèle T, de hauteur b et dont le sommet est le centre de S. Soit d la distance de ce centre à l'axe A extérieur à S et dans le même plan, et soit h la projection de a et de c sur cet axe.

Cela posé, on démontre aisément que S et T faisant une révolution autour de A, la surface décrite par c et le volume engendré par T ont pour mesures respectives

$$\text{surf. } c = c \times 2\pi d \pm h \times 2\pi b,$$

$$\text{vol. T} = T \times 2\pi d \pm \tfrac{2}{3} h \times \pi b^2;$$

le signe + ayant lieu lorsque c est situé hors de l'axe A et de sa parallèle menée par le sommet de T, et le signe — quand c tombe entre ces deux parallèles. (Voyez la 2[e] édit. du traité de géométrie.)

Or, les modes de génération étant les mêmes, il est évident que surf. a et vol. S s'obtiennent avec a, d, h, r et avec S, d, h, r, absolument comme surf. c et vol. T se trouvent avec c, d, h, b et avec T, d, h, b; ainsi l'on a nécessairement

$$\text{surf. } a = a \times 2\pi d \pm h \times 2\pi r,$$

$$\text{vol. S} = S \times 2\pi d \pm \tfrac{2}{3} h \times \pi r^2;$$

le signe + ayant lieu lorsque l'arc a est *concave* vers l'axe A et

le signe — quand il est *convexe*: s'il était en partie *concave* et en partie *convexe*, il faudrait considérer ces deux parties séparément.

C'est ainsi que pour le *tore* et la *gorge*, l'arc $a = \pi\, r$ est concave puis convexe vers A; et comme alors le diamètre $2\, r$, qui donne les deux arcs $\pi\, r$, est parallèle à A, d'où $h = 2\, r$ et $S = \frac{1}{2}\, \pi\, r^2$, il en résulte les mesures des deux surfaces et des deux volumes engendrés. De là, puisque la surfarce *annulaire ronde* est la somme des deux surfaces, elle a pour expression $4\, \pi^2\, d\, r$, tandis que le volume de l'*anneau rond* est mesuré par $2\, \pi^2\, d\, r^2$.

On pourrait considérer la surface et l'anneau engendrés par le contour et l'aire du segment circulaire, ainsi que la surface et la capacité de certain *vase*, engendré par la révolution, autour d'un axe extérieur, soit du *talon*, soit de la *doucine*. Et si $d = o$, dans les formules ci-dessus, il en résultera les expressions connues des zônes et des secteurs sphériques, de la surface et du volume de la sphère, etc.

De plus, si F est une aire plane quelconque, mais *symétrique* par rapport à un centre, et que, F pouvant d'ailleurs tourner autour de ce point, sur son plan, ce centre soit assujetti à glisser sur une ligne quelconque, brisée ou courbe, mais de longueur L connue; de telle sorte que le plan de F soit constamment perpendiculaire à chaque côté de la ligne L, si elle est brisée, et à la tangente en chaque point, si elle est courbe: en désignant par V le volume et par S la surface, engendrés respectivement par F et son périmètre P, les générations seront parfaitement analogues à celles du cylindre circulaire droit et de sa surface latérale; on aura donc toujours les mesures que voici:

$$S = L\,P \text{ et } V = F\,L;$$

lesquelles s'appliquent à un grand nombre d'anneaux, à certaines *colonnes torses*, etc.

Par exemple, si L est la circonférence $2\, \pi\, d$ et qu'en même temps F soit un hexagone régulier, de rayon r, F faisant deux révolutions autour de son centre dans son double mouvement uniforme, il en résultera un anneau remarquable, pour lequel on aura $S = 12\, \pi\, d\, r$ et $V = 3\, \pi\, d\, r^2 \sqrt{3}$; d devant être plus grand que $2\, r$.

La Similitude.

I. Nous avons déjà reconnu les conditions de *similitude*, dans les figures rectilignes planes; voyons quelles sont ces conditions, dans les polyèdres. Pour que le polyèdre P soit la *copie* exacte du polyèdre P′ et puisse en tenir lieu pour l'étude de leurs propriétés communes et pour les opérations qu'on aurait à exécuter sur P′, il faut que cha-

que coin de P soit *égal* au coin *homologue* de P′ et disposé dans le même ordre ; il faut que chaque face de P soit *semblable* à la face homologue de P′ et semblablement disposée. Si ces conditions sont remplies, il est clair que chaque partie de P *représente*, en grandeur et en position, la partie correspondante de P′ ; donc P *représente* complètement P′, et tout ce qu'on dira de P pourrra se dire exactement de P′, ou réciproquement. Les deux polyèdres P et P′ peuvent donc être pris l'un pour l'autre : ils sont *semblables* en tout et ont absolument la même *forme*, puisqu'ils seraient *égaux*, si une face de P était égale à la face homologue de P′.

En un mot, les deux polyèdres P et P′ ne diffèrent que par leurs grandeurs individuelles : ils sont représentés par les mêmes nombres d'unités de volume v et v', savoir v relative à la copie P et v' relative au modèle P′ ; car P et P′ ayant évidemment le même mode de génération, il est clair que si $P' = n\,v'$, on aura aussi $P = n\,v$. Donc pour mesurer le polyèdre P′, il suffira de mesurer sa copie P ; chose plus facile.

II. Il résulte des conditions de similitude, que nous venons de reconnaître, qu'il faut appeler *polyèdres semblables* deux polyèdres limités par un même nombre de faces, semblables chacune à chacune, semblablement disposées et également inclinées deux à deux, en passant d'un polyèdre à l'autre. Plus brièvement, nous dirons que deux polyèdres sont *semblables* (*directement*), dès qu'ils ont les coins homologues égaux et compris par des faces homologues semblables, les parties homologues étant semblablement disposées.

Mais si les parties homologues, coins et faces, sont disposées dans l'ordre inverse, en passant d'un polyèdre à l'autre, nous dirons que les deux polyèdres sont *inversement semblables* : l'un est la *copie inverse* de l'autre et les deux polyèdres ne diffèrent qu'en ce que, les volumes étant inégaux, les angles solides homologues sont *symétriques*, tandis qu'ils sont *égaux* dans les polyèdres *directement semblables*. Mais P étant la copie inverse de P′, on n'en aura pas moins $P = n\,v$, si $P' = n\,v'$; de sorte que P et P′ sont encore représentés par le même nombre n des unités relatives v et v', cubes faits sur les unités linéaires u et u', dans P et dans P′. Si donc $u' = 100\,u$, par exemple, on aura $v' = 1000000\,v$ et $P' : P = 1000000$.

Enfin, si les faces semblables sont aussi égales, les deux polyèdres P et P′, directement ou inversement semblables, seront *égaux* ou *symétriques entre eux*, et *équivalents*, dans ce dernier cas.

III. Ce que l'on remarque d'abord, dans tout polyèdre matériel, ce sont les *faces* et les *coins*, qui en déterminent essentiellement la *forme*

et la *grandeur*; la comparaison de deux polyèdres porte donc, en premier lieu, sur ces diverses parties, *correspondantes* deux à deux; il est par suite fort naturel de définir *l'égalité* et la *symétrie*, la *similitude directe* et la *similitude inverse* de deux polyèdres, par leurs coins et leurs faces, ou si l'on veut, par les faces et les angles solides.

Nous préférons les définitions ci-dessus à d'autres, non parce qu'elles sont en usage depuis longtemps, ce qui est déjà un avantage; mais parce qu'elles résument clairement les conditions en vertu desquelles l'égalité et la symétrie, la similitude directe et la similitude inverse, existent dans les polyèdres, et parce que ces définitions nous paraissent exprimer mieux que d'autres les notions définies et qui nous viennent naturellement par le seul aspect des corps matériels (susceptibles d'ailleurs de recevoir une infinité de *formes* différentes.)

IV. Maintenant, un polyèdre P étant donné, voici comment on peut construire ou du moins concevoir sa *copie*. Soit O un point situé hors du polyèdre P; soient OA, OB, OC,..., les droites qui joignent ce point à tous les sommets de P; concevons sur ces droites et à partir de O, les longueurs $OA' = OA \times r$, $OB' = OB \times r$, $OC' = OC \times r$,..; les points A', B', C',..., ainsi déterminés, sont les sommets du polyèdre P', directement semblable à P. (Le point O pourrait être un sommet de P).

Appelons en effet, ABFI l'une des faces du polyèdre P: par construction, dans la pyramide OABFI, les arrêtes du sommet O sont divisées proportionnellement en A', B', F', I'; donc A' B' F' I' est un polygone plan, semblable et parallèle au polygone ABFI; et il en est de même de toutes les faces homologues des deux polyèdres P et P'. D'ailleurs à cause que deux faces adjacentes de P' sont respectivement parallèles aux faces homologues de P, et dirigées à la fois dans le même sens, les deux coins compris sont égaux et disposés dans le même ordre. Ainsi les deux polyèdres P et P' sont non-seulement semblables de *forme*; mais aussi de *position*, à raison du parallélisme des faces homologues. Et comme r est un rapport quelconque, exprimable ou non, il existe une infinité de polyèdres P', de toute grandeur, semblable directement au polyèdre P : si $r = 1$, on aura $P' = P$.

Observons maintenant qu'on aurait la *copie inverse* de P, si à partir du point O, on portait sur les prolongements de AO, BO, CO,..., les longueurs $OA'' = OA \times r$, $OB'' = OB \times r$, $OC'' = OC \times r$, etc. Les points A'', B'', C''..., sont alors, par les raisonnements ci-dessus, les sommets du polyèdre P'', *inversement semblable* à P et conséquemment *symétrique* de P', si le rapport r est le même dans les deux constructions; d'où il suit qu'*un polyèdre P' ne peut avoir qu'un seul symétrique P''.*

Cette dénomination vient surtout de ce que P′ et P″ sont deux parties *symétriques* d'un même quatrième polyèdre, dont O est le *centre de symétrie*, comme divisant en deux parties égales toute droite, telle que A′ A″, terminée de part et d'autre à la surface de ce quatrième polyèdre.

On voit, par les constructions précédentes, que les tétraèdres homologues, dans P, P′, P″, sont *directement semblables* pour P et P′, *inversement semblables* pour P et P″, et enfin *symétriques* pour P′ et P″.

Le point O, qui sert à construire deux des trois polyèdres au moyen de l'autre, est dit *pôle de similitude directe* de P et de P′, *pôle de similitude inverse* de P et de P″, et *centre de symétrie* de P′ et de P″.

Réciproquement, *deux polyèdres semblables ou inversement semblables P et Q peuvent toujours se disposer de manière à avoir un pôle O.* Car si en construisant, avec la polyèdre P et le pôle donné O, le polyèdre P′, on prend le rapport r égal à celui de deux droites homologues de P et de Q ; il est clair que toutes les parties homologues dans P′ et Q, seront égales entre elles et disposées dans le même ordre, en passant de Q à P′ ; donc ces deux polyèdres sont égaux, et P′ n'est que la polyèdre Q, mis dans la position demandée.

V. Soient P et P′ deux polyèdres, directement ou inversement semblables, ayant un pôle O ; soient C et C′ les cubes faits sur deux droites homologues a et a' de ces polyèdres : puisque O est aussi le pôle des cubes C et C′, il est évident que C′ se construit au moyen de C absolument comme P′ se trouve au moyen de P. Si donc $P' = Pn$, on aura aussi $C' = Cn$; d'où

$$P : P' = C : C' = (a : a')^3 .$$

Les deux corps P et P′ pourraient être limités par des surfaces *mixtes* ou *courbes* ; mais alors, pour les faire rentrer dans les définitions des polyèdres semblables, directement ou inversement, il faudrait, ce qui est permis, considérer ces deux corps comme *deux polyèdres terminés par un même nombre infini de faces homologues, infiniment petites et par suite planes, semblables chacune à chacune, comprenant des coins homologues égaux, semblablement ou inversement disposés.* On aurait toujours $P = P' (a : a')^3$; ce qui donne le moyen de calculer la valeur numérique de P, lorsque la mesure de P′ et le rapport $a : a'$ sont donnés.

On voit l'importance du théorème proposé, pour mesurer le corps P, dont une ou plusieurs parties seraient ou inaccessibles ou invisibles : il faudrait copier P et mesurer la copie P′.

Les deux corps inversement semblables P et P′ deviennent symétriques et équivalents entre eux, bien que toujours inégaux, dès que

$a = a'$; car alors P : P' = 1. Ils deviendraient absolument égaux, pour $a = a'$, s'ils étaient directement semblables. Et quant aux surfaces S et S' des deux corps semblables, directement ou inversement, on démontre, comme plus haut, que

$$S : S' = (a : a')^2.$$

VI. La coexistence de toutes les conditions de similitude, directe ou inverse, dans les polyèdres, ne saurait être douteuse, d'après la construction de ces polyèdres; mais plusieurs de ces conditions sont conséquences des autres et par suite superflues. Le nombre de conditions, *nécessaires* et *suffisantes*, à la similitude directe ou à la similitude inverse de deux polyèdres, à leur égalité ou à leur symétrie, est fourni par le théorème que voici:

Dans deux polyèdres de n *faces chacun, la proportionnalité des faces homologues, ayant un même nombre de côtés, entraîne l'égalité des coins qui se correspondent.*

Soient F et F' deux faces homologues, d'un même nombre de côtés; soient S et S' les sommes des faces adjacentes à F et à F': par hypothèse on a

$$S : S' = F : F'\text{ ; d'où } S = Fr \text{ et } S' = F'r,$$

r étant un rapport exprimable on non. Or, d'après la propriété essentielle de ce rapport, on voit que S s'obtient avec F absolument comme S' se trouve avec F'; il faut donc, pour cela, que les coins adjacents à F soient respectivement égaux aux coins adjacents à F'. Ainsi les deux polyèdres ont les coins homologues égaux; ce qu'il fallait démontrer.

La proposition réciproque existe; et par exemple, dans deux tétraèdres, si les trois coins adjacents à la base de l'un sont respectivement égaux aux trois coins adjacents à la base de l'autre, il en résulte la proportionnalité des faces homologues et par suite l'égalité des autres coins, qui se correspondent dans les deux tétraèdres.

Il suit du précédent théorème, que *les deux polyèdres, de chacun* n *faces, sont directement ou inversement semblables, ils sont égaux ou symétriques entre eux, suivant que les faces homologues sont semblables ou égales et semblablement ou inversement disposées.* Chaque fois, en effet, les faces homologues sont proportionnelles et par suite les coins homologues sont égaux (ce théorème est remarquable).

Regardant donc comme condition unique l'égalité ou la similitude de deux faces homologues, il est clair que $n - 1$ sera le nombre de conditions nécessaires et suffisantes à l'égalité et à la symétrie des deux polyèdres, à leur similitude directe et à leur similitude inverse. Mais ce nombre de conditions se réduit toujours à 3 pour les pyramides et les prismes, parce que les $n - 4$ conditions restantes résultent de la définition de chacun de ces deux genres de corps géométriques.

VII. La notion de similitude conduit très-simplement à l'expression du volume d'un tétraèdre quelconque T, de base b et de hauteur h, d'après la mesure de tout prisme. En effet, pour l'ingénieuse décomposition du tétraèdre, employée par Euclide et Legendre, soit T′ le tétraèdre retranché par le plan joignant les milieux des trois arêtes du sommet de T, et soient P, P′ les deux prismes triangulaires construits sur les arêtes de deux trièdres égaux, dans T et T′: on démontre aisément que

$$P = 8\,P' \text{ et } T = 2\,P' + 2\,T'\text{; d'où } 4\,T = P + 8\,T'.$$

Or, les deux prismes P et P′ sont semblables, aussi bien que les deux tétraèdres T et T′; donc puisque $P = 8\,P'$, on voit que P n'est que P′, devenu 8 fois plus grand; donc les parties de P ne sont que les parties semblables de P′, devenues aussi chacune 8 fois plus grande; donc $T = 8\,T'$ (cela vient d'ailleurs de ce que la hauteur h de T est double de la hauteur h' homologue de T′ et qu'ainsi le rapport $T : T' = (h : h')^3 = 8$). On a donc enfin $4\,T = P + T$ et $T = \frac{1}{3}\,P$.

M. Suzanne, dans son traité de géométrie, regarde comme chose évidente, que si $P = r\,T$, on doit avoir aussi $P' = r\,T'$; mais cela résulte immédiatement de la méthode analogique.

Il est encore plusieurs autres démonstrations du théorème $P = 3\,T$; mais la plus simple et la plus directe est fournie par le principe d'analogie, comme on l'a vu plus haut (p. 11). Cette démonstration me paraît devoir être préférée à toute autre, comme remplissant à la fois les conditions de clarté et de rigoureuse exactitude.

VIII. La méthode analogique reçoit diverses formes pour exprimer les grandeurs géométriques et les mesurer les unes par les autres; en voici encore plusieurs applications.

D'abord le plan divisant le coin latéral de tout tétraèdre en deux parties égales, divise la base en deux triangles a' et c' proportionnels aux faces adjacentes a et c, comprenant le coin proposé; car il est évident que a' est déterminé par a absolument comme c' par c.

De même, si dans le tétraèdre SABC, la droite SO rencontrant en O la base ABC, fait des angles égaux, 1° avec les trois arêtes du sommet, 2° avec les trois faces latérales, il est clair, en vertu de l'analogie, qu'on aura, 1° $AO : AS = BO : BS = CO : CS$, 2° $ABO : ABS = ACO : ACS = BCO : BCS$.

Soient O et O′ deux onglets d'une même sphère, C et C′ les coins de ces onglets, F et F′ les fuseaux qui leur servent de bases, A et A′ les angles sphériques de ces fuseaux, B et B′ les angles de C et de C′, a et a' les arcs de grands cercles, interceptés par les côtés des angles B et B′, ces arcs joignant les milieux des côtés de F et de F′: le mesurage de a

par a' est évidemment le plus facile, au moyen du compas. Or, mesurer a par a', c'est mesurer en même temps B par B', C par C', A par A', F par F' et O par O'. On a donc simultanément

$$a = n\,a',\ B = n\,B',\ C = n\,C',\ A = n\,A',\ F = n\,F' \text{ et } O = n\,O'.$$

De là résultent les proportions connues; et de plus, r désignant le rayon de la sphère, il est clair que si $a' = \frac{1}{2}\pi r$, d'où $F' = \pi r^2$ et $O' = \frac{1}{3}\pi r^3$, on aura $F = a \times 2r$ et $O = F \times \frac{1}{3} r$.

Prenons le centre de la sphère dont r est le rayon pour le sommet commun aux deux angles solides opposés S et S' : ces deux angles sont *symétriques* et leurs faces interceptent les pyramides sphériques *symétriques* P et P', ayant pour bases les polygones sphériques *symétriques* Q et Q'. Plaçons au même centre les deux trièdres droits, opposés et égaux à D, déterminant les deux tétraèdres sphériques *trirectangles* égaux à T, ayant pour bases les deux triangles trirectangles égaux à T'. Or, mesurer S par D, c'est mesurer en même temps P par T, Q par T', S' par D, P' par T et Q' par T'; donc S vaut S', P vaut P' et Q vaut Q'. De plus, on a $S = D\,(Q : T')$ et $P = T\,(Q : T')$; d'où $P = Q \times \frac{1}{3} r$.

Pour la théorie des polygones et des pyramides sphériques, *directement* ou *inversement semblables*, il faudrait considérer deux sphères, de rayons différents r et r', ayant pour centre commun le sommet des angles solides opposés S et S'.

Ces diverses applications montrent bien le rôle important que l'analogie joue en géométrie, pour y déterminer les formules et les relations numériques. Aussi toutes les méthodes de calcul sont-elles plus ou moins analogiques; et nous avons déjà vu que souvent, pour rendre l'analogie plus évidente, il faut recourir à la *méthode infinitésimale*, basée elle-même sur le principe des *zéros relatifs*, que nous allons considérer.

Les zéros relatifs.

I. Il existe plusieurs quantités que l'on doit regarder comme absolument nulles vis-à-vis d'autres grandeurs, parce qu'on ne saurait en tenir compte, pour augmenter ou diminuer ces dernières. Par exemple, dans une somme à payer, on doit regarder un millième de franc comme absolument nul : c'est un *zéro relatif* à la somme proposée, parce que n'ayant pas de monnaie plus petite que le centime, on est forcé de négliger ce millième, comme s'il ne devait pas augmenter la somme à payer. Pareillement, une pincée du sable amassé pour bâtir, un grain d'un sac de blé, un brin d'un tas de foin, etc., sont autant de *zéros relatifs*. Car bien que ces diverses quantités ne soient pas nulles, ni même *infiniment petites*, on ne saurait cependant en tenir

compte pour l'évaluation numérique des grandeurs dont elles font parties, puisque pour cela il faudrait dire quelle fraction la pincée de sable, par exemple, est du tas auquel elle apppartient; chose impossible, aussi bien que pour le grain de blé, le brin de foin, etc. On doit donc négliger ces diverses choses et les regarder comme absolument nulles vis-à-vis des grandeurs qui les contiennent; et c'est ce qu'on fait toujours dans toutes les approximations numériques, fournies par le mesurage et l'évaluation des quantités.

II. La théorie du mesurage a souvent besoin de la méthode infinitésimale, qui n'est au fond que la méthode des coefficients indéterminés; or, toutes les applications de la méthode infinitésimale reposent sur le principe des *zéros relatifs*, que voici :

Toute quantité doit se négliger et être regardée comme absolument nulle à l'égard de celle qui la contient une infinité de fois : c'est un *zéro relatif* à cette dernière, bien que ce zéro ait une valeur et ne soit pas le *zéro absolu* ou le *rien*, marquant l'absence de toute grandeur.

En effet, tout nombre *infiniment grand* étant désigné par ∞, qui s'énonce l'*infini*, on conçoit que si a étant une quantité *finie*, on a $a = x \times \infty$, x sera une quantité *infiniment petite* et qu'on aura toujours $a \pm x = a$. Car x étant de a une fraction toujours inconnue et inexprimable, échappant aux sens et à l'imagination, par sa petitesse, il est impossible d'en tenir compte, pour augmenter ou diminuer a; on doit donc écrire $a \pm x = a$, absolument comme si la quantité x était rigoureusement nulle.

Mais pour démontrer complètement le principe proposé, soit m l'aire du carré fait sur la longueur *finie*, interceptée par les deux perpendiculaires à une même droite illimitée; soit B l'aire du *biangle* compris entre la droite et ses deux perpendiculaires : celles-ci étant parallèles, l'aire B est infinie dans le sens de l'ouverture et l'on a nécessairement $B = m\infty$. Soient A et C les deux angles droits *correspondants* que la droite fait avec ses deux perpendiculaires : ces deux angles pouvant se confondre en un seul, sont parfaitement égaux, bien que A surpasse actuellement C du biangle B; celui-ci est donc comme *nul* vis-à-vis de A et de C; donc B est un *zéro relatif*. Or, on a évidemment $A = B\infty = m\infty^2$ et $C = B(\infty - 1) = m(\infty^2 - \infty)$; donc puisque $A = C$, il vient successivement.

$$\infty^2 = \infty^2 - \infty,\ \infty = \infty - 1,\ 1 = 1 - (1 \text{ sur } \infty), \text{etc.}$$

Ces diverses égalités étant exactes, il faut que ∞ soit nul vis-à-vis de ∞^2, 1 vis-à-vis de ∞, 1 sur ∞ vis-à-vis de 1, etc.

Par ce principe, puisque l'aire de tout triangle est nulle vis-à-vis de chacun de ses angles, surfaces planes infinies, on voit que *l'angle ex-*

térieur d'un triangle vaut toujours la somme des deux angles intérieurs opposés. De sorte que les trois angles valent ensemble deux droits.

III. Ce n'est que par le principe des zéros relatifs que la méthode infinitésimale devient complètement analogique, pour passer du connu à l'inconnu, c'est-à-dire pour représenter les lignes *courbes* par des lignes *brisées*, les aires *curvilignes* par des aires *rectilignes*, les surfaces *courbes* par des surfaces *polyèdrales* et les *corps ronds* par des *polyèdres* (compris sous une infinité de faces planes rectilignes infiniment petites).

De plus, pour obtenir l'expression de la grandeur géométrique cherchée, on décompose cette grandeur en parties infiniment petites et analogues, termes d'une série dont la *loi* soit connue, puis on calcule la somme de cette série. Or, la série proposée est souvent la somme des puissances m ièmes des n premiers nombres entiers, n étant infini et m un exposant quelconque; il faut donc chercher l'expression de cette somme, désignée par $\int n^m$; et l'on y parvient aisément comme il suit : il est évident que

$$\tfrac{1}{2} n (n + 1) - \tfrac{1}{2} (n - 1) n = \tfrac{1}{2} n (n + 1 - n + 1) = n,$$

$$\tfrac{1}{6} n (n + 1) (2n + 1) - \tfrac{1}{6} (n - 1) n (2n - 1) = n^2,$$

et ainsi pour d'autres identités analogues. Le premier terme de chaque différence exprimant la somme des n premiers termes d'une série, il est clair que le second terme, provenant de la substitution de $n - 1$ à n dans le premier, sera la somme des $n - 1$ premiers termes de cette série ; donc le reste n ou n^2 en sera le n ième terme. Par conséquent n étant un nombre entier, aussi grand qu'on voudra, on aura toujours

$$\int n = \tfrac{1}{2} n (n + 1), \int n^2 = \tfrac{1}{6} n (n + 1) (2n + 1), \text{ etc.}$$

L'unité finie est nulle vis-à-vis de n infini; donc alors $\int n = \frac{1}{2} n^2$, $\int n^2 = \frac{1}{3} n^3$, $\int n^3 = \frac{1}{4} n^4$, etc.

En général, m étant un exposant quelconque, entier ou fractionnaire, même négatif, pourvu qu'alors il soit différent de -1, on aura toujours, en vertu du principe d'analogie et n étant entier infini,

$$(1 + m) \int n^m = n\, n^m.$$

IV. Outre cette formule importante, le principe des zéros relatifs en fournit plusieurs autres à la méthode infinitésimale, pour l'évaluation numérique des grandeurs *finies*. On démontre aisément en effet, que :

1° *Toute courbe plane n'est au fond qu'une ligne brisée, composée d'une infinité de côtés infiniment petits*, appelés *éléments* de la courbe. Ce principe est nécessaire à l'étude des courbes, à leur *similitude*, à leur *rectification*, etc.

2° *Une surface courbe est la somme d'une infinité de portions planes, rectilignes et infiniment petites*, nommées *éléments* de la surface; d'où l'on déduit la *similitude* des surfaces courbes et des corps ronds.

3° *Le segment de toute courbe plane est la somme d'une infinité de parallélogrammes rectilignes, de bases parallèles à la corde du segment et tous de même hauteur infiniment petite.* Ce principe et l'expression de $\int n^m$ conduisent à la *quadrature* des paraboles $y^2 = 2\,p\,x$, $y = a\,x^m$; des hyperboles $xy = H^2$, $xy^2 = a^3$, $xy^3 = a^4$, $x^2\,y - x + y = 0$, etc.; de la folium $ay^2 = x\;(a - x)^2$ et de $a^2\,y = x^2\,(a \pm \sqrt{a\,x})$.

4° *Le secteur de toute courbe plane est la somme d'une infinité de triangles isocèles rectilignes, ayant l'angle du sommet égal et mesuré par un arc circulaire infiniment petit, de rayon* 1. Ce principe et l'expression de $\int n^m$ ou certaines séries trigonométriques, fournissent la quadrature des spirales, des lemniscates et de certaines courbes planes, dont on a les équations polaires.

5° Enfin, *tout corps géométrique fini est la somme d'une infinité de tranches, à bases parallèles et toutes de même épaisseur infiniment petite, ces tranches pouvant conséquemment être regardées comme des prismes ou des cylindres.* Par exemple, dans la grandeur géométrique G, considérée plus haut (p. 19), si t désigne la v ième des n tranches, à partir du sommet, d'où $h = n\,z$, on aura, n étant infini,

$$h^m\,t = b\,z\,z^m\,v^m \text{ et } h^m\,G = b\,z\,z^m \int n^m\,;$$

d'où il vient, comme plus haut, $(1 + m)\,G = b\,h$.

V. La décomposition en *tranches* infiniment minces est le procédé le plus général pour mesurer les aires et les volumes, à l'aide du calcul. On cherche l'expression de la v ième de ces tranches et l'on somme la série dont cette expression est le v ième terme. En voici plusieurs exemples remarquables.

1° L'origine des coordonnées rectangulaires étant le sommet de la courbe $y^2 = 2\,p\,x + q\,x^2$, soit 2 S l'aire du segment qui répond à $x = h$ et à $y = k$; ce segment aura 2 k pour corde. Considérons un axe extérieur parallèle à celui des x, $d > k$ désignant la distance entre les deux axes et cherchons le volume engendré par la révolution du demi-segment S autour de l'axe extérieur. Il est clair, par l'expression de la v ième tranche, à bases circulaires parallèles et d'épaisseur infiniment petite, qu'on aura

$$\text{vol. S} = S \times 2\,\pi\,d \pm \pi\,h^2\,(p + \tfrac{1}{3}\,q\,h).$$

De sorte que si $d = 0$, $p = r$ et $q = -1$, il viendra, pour le volume du *segment de la sphère*, de rayon r, vol. S $= \pi\,h^2\,(r - \frac{1}{3}\,h)$. Le volume de la sphère est donc $\frac{4}{3}\,\pi\,r^3$; tandis que le *secteur sphérique* S′, somme du segment proposé et du cône $\frac{1}{3}\,\pi\,k^2\,(r - h)$, a pour expression $S' = 2\,\pi\,r\,h \times \frac{1}{3}\,r$, en observant que $k^2 = 2\,r\,h - h^2$.

2° Soit Z la *zône*, base de S′ : cette zône est la somme d'un nombre infini de triangles sphériques infiniment petits et se confondant chacun avec la portion de contact du plan tangent; donc S′ est la somme du même nombre infini de tétraèdres, tous de même hauteur r; donc S′ $= Z \times \frac{1}{3} r$ et $Z = h \times 2 \pi r$.

3° Concevons un cylindre droit tel, que sa base et toute section parallèle soit le segment 2 S: Si par l'axe h de ce segment nous menons deux plans quelconques, ces plans détacheront du cylindre un *onglet* O′, ayant h pour *hauteur* et pour *base* le triangle T, intercepté sur la face plane du cylindre droit proposé. On trouve aisément, par la v ième *tranche*, à bases parallèles et semblables à T, la relation

$$k^2\, O' = T\, h^2 (p + \tfrac{1}{3}\, q\, h).$$

Il en résulte le moyen de mesurer le volume de toute *voûte*, composée de plusieurs onglets O′. De plus, si S est le quart du cercle πr^2, d'où $h = k = r = p$ et $q = -1$, on aura $O' = \frac{2}{3} r$ T, expression remarquable surtout parce qu'elle ne dépend point du nombre π, contrairement à ce qu'on pouvait supposer d'abord.

4° Soit C la portion courbe de la surface du dernier onglet O′, quand $S = \frac{1}{4} \pi r^2$; on démontre aisément alors que $O' = C \times \frac{1}{3} r$; d'où C = 2 T, expression tout aussi remarquable que celle de O′.

5° Soit T′ la capacité du *tonneau* qui résulte du volume engendré par la demi-ellipse autour de son grand axe 2 a, moins les deux volumes égaux à celui qu'engendre le demi-segment S autour du même axe. On a donc $d = o$, $a\, p = b^2$ et $a^2\, q = -\, b^2$. De plus, si l'ellipse est très-allongée et qu'on ait, par exemple, $a = 6\, b$, $h = 3\, b$ et $b = 3$ décimètres, on trouvera $T' = \frac{11}{2} \pi\, b^3 = 933$ litres, environ.

6° Soit h la hauteur du segment S, dans *l'ellipsoïde* et les deux *hyperboloïdes*, rapportés à leurs axes principaux 2 a, 2 b et 2 c: d'après l'expression de la v ième tranche, que l'on peut regarder comme un cylindre droit, à bases elliptiques, sa hauteur u étant infiniment petite et donnée par $h = nu$, on trouve, pour l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à deux nappes et l'hyperboloïde à une nappe, les relations

$$a^2 S = \pi\, b\, c\, h^2 (a \mp \tfrac{1}{3} h) \text{ et } c^2 S = \pi\, a\, b\, h (c^2 + \tfrac{1}{3} h^2).$$

7° Si $h = 2a$ dans l'ellipsoïde $h = a$ dans l'hyperboloïde à deux nappes et $h = c$ pour l'hyperboloïde à une nappe, on trouve chaque fois $S = \frac{4}{3}\, abc$: C'est le volume de l'ellipsoïde dont abc, sont les demi-axes principaux. Cette valeur met bien en évidence la grande analogie qui existe entre les surfaces du second ordre : elle se tire de celle du volume de la sphère en observant que si k désigne le rapport du volume E de l'ellipsoïde au volume abc, on aura $E = k\, abc$. Le rapport k est nécessairement indépendant de a, de b et de c; ce nombre ne change

donc point quand $a = b = c$; mais alors $k = \frac{4}{3}\pi$ et $E = \frac{4}{3}\pi abc$; ce qu'il fallait trouver.

VI. On voit avec quelle facilité la méthode infinitésimale conduit aux expressions des aires et des volumes, en certains cas. On peut même éviter l'emploi explicite des grandeurs infinitésimales et de la réduction à l'absurde, sans que les calculs en soient beaucoup plus compliqués.

Par exemple, soit P le volume de la pyramide, de hauteur h et de base b quelconque, mixte ou curviligne, convexe ou concave. Concevons que la hauteur h soit divisée en n parties égales à x, par des plans parallèles à la base b, d'où $h = nx$: ces plans divisent P en n tranches toutes de même épaisseur x. Soit T la v ième de ces tranches, à partir du sommet extrémité de h; soient p et q ses deux bases, aux distances vx et $(v-1)x$ du même sommet. On sait que $b : p :: h^2 : v^2 x^2$; d'où posant $b = c h^2$, il vient $p = c v^2 x^2$. De même, $q = c (v-1)^2 x^2$. La v ième tranche T est moindre que le prisme px, comme y étant contenue; elle est plus grande que le prisme qx, comme le renfermant; par conséquent on a $T = px - < (p-q)x$ ou

$$T = cx^3v^2 - < 2\,cx^3v.$$

D'ailleurs il est clair que $v^2 = \frac{1}{3}[v^3 - (v-1)^3] + < 2v$. Substituant cette valeur dans T, il est clair que la différence de deux quantités, moindre chacune que $2cx^3v$, est moindre elle-même que $2cx^3v$, et à plus forte raison que $2cx^3n$ ou $2chx^2$, puisque v ne surpassera jamais n; on aura donc

$$T = \frac{1}{3}cx^3[v^3 - (v-1)^3] \pm < 2chx^2.$$

Prenant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, puis ajoutant entre elles les n expressions résultantes, la somme sera la valeur de P; réduisant donc, d'après $h = nx$ et $b = ch^2$, on trouvera

$$P = \frac{1}{3}bh \pm < 2bx.$$

La différence $P - \frac{1}{3}bh$ est constante, aussi bien que P, b et h; néanmoins elle est toujours moindre que le prisme $2\,bx$, essentiellement variable avec x et qui peut lui-même devenir moindre que le plus petit volume assigné, en prenant la partie x suffisamment petite. Il faut donc, pour satisfaire à ces deux conditions, que la différence $P - \frac{1}{3}bh$ soit *nulle* et qu'on ait $P = \frac{1}{3}bh$.

On trouverait, par des raisonnements absolument semblables, le volume de tout segment sphérique. On devrait donc préférer ce procédé, même à celui de M. *Querret*, pour l'équivalence des tétraèdres, si mieux on n'aimait se servir du principe d'analogie, tout aussi clair et aussi exact, mais beaucoup plus simple, comme n'exigeant aucun calcul. En général, c'est par la méthode analogique, comprenant la méthode infinitésimale, que l'on trouve le plus simplement et le plus clairement

possible les relations entre les grandeurs qui sont comparables les unes aux autres.

Rectification de la circonférence.

I. La méthode infinitésimale étant complètement analogique, conduit souvent, avec facilité, aux expressions des aires et des volumes finis; mais elle est beaucoup plus compliquée pour les longueurs *curvilignes*, considérées comme lignes *brisées*; tellement qu'il est peu de courbes dont on sache opérer la *rectification* suffisamment approchée.

Rectifier une courbe C tracée et limitée, c'est en mesurer la longueur et l'exprimer en unités *rectilignes*, en mètres, par exemple, comme si la courbe était redressée et étendue en ligne droite.

Mais comment opérer cette rectification? Le moyen *mécanique*, qui s'offre d'abord, est de tendre sur C un *fil* flexible, puis de placer ce fil sur une droite, avec le même degré de *tension*, et de prendre la longueur du fil, dans sa nouvelle position, pour celle rectifiée de la courbe C. Mais il faut que cette courbe, limite d'un corps matériel, soit *convexe*: si elle était *concave* et tracée sur le plan du papier, il faudrait remplacer le fil par une *lamme* très-mince, à bords rectilignes et parfaitement *élastique*. On aura ainsi la longueur C en ligne droite; mais l'approximation, bien qu'elle puisse être suffisante, sera toujours fort incertaine, par l'impossibilité de réaliser toutes les conditions d'exactitude qu'exige l'opération. D'ailleurs cette opération mécanique, d'une approximation dont le degré reste inconnu, devrait se répéter sur chaque courbe tracée; tandis que si la courbe peut se rectifier, par la méthode infinitésimale, il en résultera une *formule*, applicable à toutes les courbes de même *genre*, et qui fera connaître chaque fois la limite supérieure de l'erreur commise sur la longueur mesurée. On voit l'importance des formules de rectification, toujours préférables aux procédés mécaniques indiqués ci-dessus et à tout autre analogue.

II. Si l'on connaissait exactement le rapport π de la circonférence C à son diamètre $2r$, d'où $C = 2\pi r$, la rectification de C serait bien facile, puisqu'elle se réduirait à mesurer, le plus exactement possible, le rayon r. Et comme le nombre π se présente dans une foule d'évaluations numériques, on avait ainsi de sérieux motifs pour le déterminer exactement. Or, par l'un des procédés mécaniques, exécuté le plus exactement possible, on trouve, avec un bon compas, $\pi = 3\frac{1}{7}$ environ; mais ce n'est-là qu'une approximation fort médiocre, et jusqu'à présent on n'a pu calculer le nombre π que d'une manière très-approchée.

On conçoit bien que la circonférence C, *ligne courbe*, et son diamètre, *ligne droite,* ne peuvent avoir d'autre mesure commune qu'une quantité *infiniment petite*, et qu'ainsi le nombre π est *inexprimable.* Mais le rapport de la diagonale du carré à son côté, savoir $\sqrt{2}$, est aussi inexprimable; et cependant on a des procédés rigoureux pour construire tous les radicaux du second degré; on pouvait donc penser que peut-être il serait possible aussi de construire rigoureusement le nombre π. C'est de là que proviennent les nombreux essais inutiles faits pour *carrer* le cercle, ou ce qui revient au même, pour rectifier la circonférence.

De pareils essais ne sont plus tentés maintenant que par ceux dont les connaissances en géométrie ne vont pas jusqu'aux méthodes élémentaires pour résoudre les deux problèmes que voici :

Etant donné numériquement le rayon, calculer la longueur de la circonférence en unités rectilignes?

Connaissant numériquement la longueur rectiligne de la circonférence, calculer son rayon?

Dans ces deux problèmes, l'analogie entre le cercle et les polygones réguliers conduit à calculer, soit le périmètre d'un polygone régulier, d'un très grand nombre de côtés, ayant le rayon ou l'apothème égal au rayon du cercle proposé, soit le rayon et l'apothème du polygone régulier dont le périmètre ait même longueur que la circonférence donnée. Dans les deux cas, il faut passer par une suite de polygones réguliers, de deux en deux fois plus de sommets, jusqu'à ce que le rayon et l'apothème du dernier polygone soient égaux dans les décimales conservées. Car ce dernier polygone régulier serait un cercle, si son apothème et son rayon étaient rigoureusement égaux; ce qui n'arrivera jamais, puisque son côté devrait se réduire à un infiniment petit de l'ordre infinième. Mais on voit néanmoins que *le cercle n'est au fond qu'un polygone régulier d'une infinité de sommets, dont le rayon et l'apothème coïncident;* c'est le polygone régulier du plus grand nombre de côtés, en vertu de l'analogie.

III. Le second problème ci-dessus est celui dont la solution offre les calculs les plus simples pour déterminer la valeur approchée de π, et donne lieu à des considérations utiles, que nous allons développer, bien que plusieurs de ces développements se trouvent déjà dans la 2e édition de notre traité de géométrie.

Soit d'abord A B C un triangle rectangle en A, dans lequel A B est le demi-côté d'un polygone régulier de n sommets, C A$=a$ l'apothème et C B $= r$ le rayon de ce polygone. Soient D et E les milieux respectifs de C B et C A, d'où D E $= \frac{1}{2}$ A B; du point D menons D B$' =$

$\frac{1}{2}r$ perpendiculaire à B A, et du point B′, B′A′ perpendiculaire à C A prolongé: il est clair que B′A′ = D E = $\frac{1}{2}$ AB et que l'angle B′CA′ = B′CB, vu que BDB′ = 2BCB′ = BCA, d'où B′CA′ = $\frac{1}{2}$ BCA. Donc CA′ = a' et CB′ = r' sont l'apothème et le rayon du polygone régulier de 2 n sommets, *isopérimètre* avec le proposé. Soit I le milieu de la base CB′ du triangle isocèle CDB′: les deux triangles équiangles C B′A′ et C D I donnent $a' : \frac{1}{2}r' = r' : \frac{1}{2}r$; ainsi à cause de CA′ = C E + DB′, on a les deux relations très-simples et fort remarquables :

$$r' = \sqrt{(r a')} \text{ et } a' = \tfrac{1}{2}(a + r) \ldots . (1)$$

Il est évident que $a' > a$ et $r' < r$; si donc on passe par une suite de polygones réguliers isopérimètres, de deux en deux fois plus de sommets, les apothèmes iront en augmentant et les rayons en diminuant; il est donc possible de parvenir à un polygone régulier dont le rayon et l'apothème soient égaux dans les sept premières décimales, par exemple.

IV. Pour calculer ce rayon et cet apothème, partons de l'exagone régulier dont le périmètre 6c soit donné numériquement avec le côté c, que nous prendrons d'abord pour *unité linéaire*: nous aurons donc $r = c = 1$ et $a = \frac{1}{2} c \sqrt{3} = 0,\ 8660254$. Avec ces valeurs les formules (1) feront connaître le rayon et l'apothème du polygone régulier de 12 côtés, dont 6c est le périmètre; puis l'apothème et le rayon du polygone régulier de 24 côtés, de 48, 96,..., ayant tous le même périmètre 6 c. Calculant chaque fois sept décimales exactes, on formera le tableau (p. 114 de la géométrie, où $x = c$).

L'apothème et le rayon du polygone, régulier de 12288 côtés étant égaux chacun à 0, 9549296 c, chacun peut être pris pour le rayon du cercle dont la circonférence est égale en longueur au périmètre constant 6c; par conséquent on a $\pi = 6c$: 2 fois 0,9549296c ou bien $\pi = 3 : 0,9549296$; d'où

$$\pi = 3,1415926 \text{ et } 1 : \pi = 0,3183099.$$

La seconde de ces valeurs est exacte dans les sept premières décimales, aussi bien que celle de π; mais il pourrait se faire que le dernier chiffre 6 de π ne fût pas exact, vu que la valeur du rayon n'est qu'approchée. Or, la différence des circonférences, dont r et $r + d$ sont les rayons, est $2\pi d$; donc puisque d est moindre que la demi-décimale du 7e ordre, l'erreur sur la valeur de π n'est pas de 3 de ces décimales. On sait d'ailleurs, en en calculant vingt, que les sept décimales de π sont exactes.

V. Voyons maintenant les moyens d'abréger les calculs que nous ve-

nons d'indiquer. *Premièrement*, si l'on ne veut pas employer les *logarithmes* pour calculer les rayons le plus simplement et le plus sûrement possible, à l'aide des *tables*, ayant au moins 10 décimales, on peut toujours achever les extractions de racines carrées par de simples divisions, après avoir abrégé la multiplication des deux nombres ayant chacun sept décimales exactes, comme il est prescrit en arithmétique.

Secondement, il n'y aura que six extractions de racines carrées à effectuer ; car pour la septième $r' = \sqrt{(r\,a')}$, on a $r = 0{,}9549723$ et $a' = 0{,}9549083$; d'où $r - a' < \sqrt{a'}$ ou $(\sqrt{r} + \sqrt{a'})(\sqrt{r} - \sqrt{a'}) < \sqrt{a'}$. Et comme $\sqrt{a'} < \sqrt{r}$, donne $2\sqrt{a'} < \sqrt{r} + \sqrt{a'}$, il vient, à plus forte raison, $2(\sqrt{r} - \sqrt{a'}) < 1$. Cela donne

$$\tfrac{1}{2}(r + a') - \sqrt{(a'r)} < \tfrac{1}{8}.$$

Cette différence étant donc moindre que le 8ᵉ de l'unité décimale du 7ᵉ ordre, on pourra désormais substituer la demi-somme à la racine carrée.

Troisièmement, cette abréviation est déjà très-grande ; mais il existe une formule pour calculer immédiatement le dernier rayon et le dernier apothème. En effet, la demi-somme remplaçant la racine carrée, on a

$$2a' = a + r \text{ et } 2r' = a' + r\,;$$

$$\text{d'où } a' + 2r' = a + 2r \text{ et } 4(r' - a') = r - a.$$

Ces deux équations, pour le v ième et le $(v+1)$ième polygone, sont représentées par celles-ci :

$$\left.\begin{array}{l} a_{v+1} + 2r_{v+1} = a_v + 2r_v, \\ 4(r_{v+1} - a_{v+1}) = r_v - a_v. \end{array}\right\} \quad \ldots (2)$$

La première de ces équations *à numéros* peut se représenter par

$$x_{v+1} = x_v\,;$$

si donc on y fait successivement $v = 6, 7, 8, 9, \ldots, n-1$, la somme des équations résultantes donnera, réductions faites,

$$x_n = x_6 \text{ ou } a_n + 2r_n = a_6 + 2r_6.$$

Comme on finira toujours par trouver le polygone régulier dont le rayon et l'apothème sont égaux, dans les décimales conservées, on aura

$$a_n = r_n = \tfrac{1}{3}(a_6 + 2r_6) = 0{,}9549296.$$

Plus généralement, la formule demandée est

$$a_n = r_n = \tfrac{1}{3}(a_v + 2r_v).$$

Cette formule abrège singulièrement les calculs quand on veut avoir un grand nombre de décimales exactes ; chose nécessaire dans les nombreux usages du nombre π, pour obtenir des approximations suffisantes et bien connues.

Quatrièmement, on peut aussi trouver le nombre v de tous les polygones réguliers isopérimètres, pour que le rayon et l'apothème du dernier ne diffèrent pas de la demi-décimale du n ième ordre.

A cet effet, observons que la seconde équation (2) peut se représenter par celle-ci :

$$4\,\mathrm{d}_{v+1} = \mathrm{d}_v.$$

Prenant $v = 1, 2, 3, 4\ldots, v - 1$ et multipliant membre à membre les $v - 1$ équations résultantes, on trouvera

$$4^{v-1}\mathrm{d}_v = \mathrm{d}_1 \text{ ou } 4^{v-1}(\mathrm{r}_v - \mathrm{a}_v) = \mathrm{r}_1 - \mathrm{a}_1.$$

Or, on veut que la plus grande valeur de $\mathrm{r}_v - \mathrm{a}_v$ soit $\frac{1}{2}(10^{-n})$; et de plus, on a évidemment $\mathrm{r}_1 - \mathrm{a}_1 < 0{,}2$ et $> 0{,}1$. Il vient donc simultanément

$$4^{v-1} < 0{,}4 \times 10^n \text{ et } 4^{v-1} > 0{,}2 \times 10^n.$$

Prenant les logarithmes ordinaires de part et d'autre, on a

$$(v-1)\,2l2 < 2l2 + n - 1 \text{ et } > l2 + n - 1.$$

Comme $l2 = 0{,}3010300$, on peut s'arrêter à $l2 = 0{,}3$; donc

$$v < 2 + \tfrac{5}{8}(n-1) \text{ et } v > 1{,}5 + \tfrac{5}{5}(n-1).$$

Par ces deux formules, si l'on veut avoir sept décimales exactes, d'où $n = 7$, on aura $v < 12$ et $v > 11{,}5$. Mais comme v doit toujours être entier, il faudra prendre $v = 12$; donc comme on le voit par le tableau, on devra considérer 12 polygones réguliers, pour que le rayon et l'apothème du dernier soient égaux dans les sept premières décimales.

Pour $n = 4$, il vient $v = 7$; pour $n = 5$ ou 6, on a $v = 10$; pour $n = 15$, 100 ou 150, il vient $v = 25$, 167 ou 251.

VI. Le rayon de la circonférence $6c$ étant exprimé par pc, quel que soit le nombre de décimales de p, valeur de l'apothème et du rayon du dernier polygone régulier isopérimètre, il est clair que le rapport $\pi = 6c : 2pc$ ne dépend point de c, puisqu'il se réduit à $\pi = 3 : p$; donc quelle que soit la conférence $6c$, son rapport à son diamètre $2pc$ est un nombre constant π, que nous venons de calculer avec sept décimales exactes. Ainsi comme on l'a déjà démontré par la méthode analogique, *les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs diamètres*; ce sont deux lignes *semblables*, représentées par leurs rayons, pour les opérations graphiques; tandis que les aires des deux cercles sont représentées par les carrés faits sur leurs rayons ou sur leurs diamètres.

Il résulte d'ailleurs, des calculs indiqués plus haut, que le nombre π exige une infinité de racines carrées successives, inexprimables chacune, pour en déterminer tous les chiffres décimaux, en nombre infini. De sorte que la longueur rectiligne de la circonférence est composée d'une infinité de radicaux *irréductibles* du second degré, et ne peut se construire que par approximation. Donc la *quadrature* du cercle est im-

possible; c'est à-dire qu'il n'existe aucun procédé rigoureux qui donne le côté du carré équivalent au cercle.

Enfin, puisque le cercle coïncide avec le polygone régulier d'une infinité de sommets, inscrit ou circonscrits, on voit que *tout arc circulaire infiniment petit se confond numériquement avec sa corde et avec sa tangente, limitée aux prolongements des rayons joignant les extrémités de cet arc.*

VII. Soit r la valeur numérique du rayon de l'arc circulaire a, à *rectifier*, et soit v le nombre de *degrés* contenus dans a; on aura évidemment $90 : v = \frac{1}{2} \pi r : a$; d'où

$$a = \pi r (v : 180).$$

La rectification de l'arc est donc plus compliquée que celle de la circonférence; non-seulement il faut mesurer le rayon, mais aussi trouver le nombre v de degrés de cet arc ou de son *angle au centre*, si l'arc est tracé sur le terrain.

Or, si l'arc a est seul donné et tracé sur le papier, il faudra, avec un bon compas, en déterminer le centre, le rayon r et la circonférence dont a fait partie. Divisant cette circonférence C en six parties égales, chose facile; puis à partir du premier point de division, portant, avec le compas, l'arc a sur C, en faisant un tour, deux tours, trois tours, etc., jusqu'à ce que la pointe du compas tombe exactement sur l'une des six divisions de C (ce qui arrivera toujours si a et C ont une mesure commune *finie*), ou du moins jusqu'à ce que la pointe soit assez voisine de l'une des six divisions, pour qu'on puisse les regarder comme se confondant en un seul point : examinant alors quel est le *rang* de ce point sur C, lequel sera, par exemple, le troisième et donnera le tiers de C ; comptant le nombre de fois que a a dû être porté sur C et le nombre de révolutions qu'il a fallu opérer, pour arriver à ce premier tiers de C, on calculera aisément la valeur v du nombre de degrés de l'arc proposé a. Car s'il a fallu 3 tours et que a ait été porté 21 fois, on aura $21\,a = 3\,C + \frac{1}{3}\,C = 1200°$; d'où $v = \frac{1}{7}$ de 400 et $63\,a = 20\,\pi\,r$.

On vérifierait la valeur trouvée pour v en cherchant la *plus grande mesure commune* à C et à a : dans ce cas, comme les *restes* vont en diminuant, il arrive souvent que le dernier ne peut plus se saisir avec le compas; on le compare alors au reste précédent, pour estimer *à vue* s'il en est la moitié, le tiers, etc. Mais ce procédé est moins simple que celui qu'on vient d'indiquer, et pourrait être moins exact, bien que, par la *fraction continue* résultante, on puisse calculer la *limite supérieure* de l'erreur commise.

On voit comment la rectification de tout arc tracé, sur le papier, peut s'opérer avec le compas, à l'aide de l'*échelle de dixmes* et du *vernier*, pour mesurer le rayon r.

Si l'arc circulaire était tracé sur le terrain, c'est-à-dire sur un plan de *grandes dimensions*, le centre et le rayon étant inconnus, il faudrait en mesurer la corde c, la flèche f et calculer le rayon r par

$$f : \tfrac{1}{2}c :: \tfrac{1}{2}c : 2r - f.$$

On mesurerait ensuite le nombre v' de degrés contenus dans l'angle du sommet du triangle isocèle de base c et de hauteur f, ou plutôt on calculerait ce nombre v', au moyen des *tables trigonométriques*; d'où l'on aurait $v = 360 - 2v'$. Par exemple, si $c = 100$ mètres, $f = 25^{m}$ et $v = 120°$, on aura $3a = 125\pi$ et $a = 392^{m},70$ environ. Par ces valeurs, on calcule l'aire enfermée par l'arc a et sa corde c.

Les cinq quantités a, v, c, f et r sont telles, que si deux d'entre elles, a et v, a et r, v et r, v et c, c et f, c et r, f et v, f et r, sont données numériquement, on pourra calculer les trois autres, en observant que a désigne la longueur rectiligne de l'arc proposé. Il faudrait d'autres principes, pour résoudre le problème, si l'on ne connaissait que a et c ou a et f. Enfin, si $r + v = 60$, le *maximum* de a répond à $r = v = 30$ et vaut 5π.

VIII. Rien de plus facile que de calculer, d'une manière aussi approchée qu'on voudra, le côté c du carré équivalent, soit au cercle, soit au secteur circulaire, dont on connaît numériquement le rayon r. Et si l'on observe que $\pi < 4$ et $\pi > 3$, on démontrera aisément les propositions que voici :

1° *Le périmètre du carré équivalent au cercle est plus grand que la circonférence.* Réciproquement, *le carré est plus petit que le cercle isopérimètre.*

2° *Le contour du carré est moindre que celui du demi-cercle équivalent.* Réciproquement, *le carré est plus grand que le demi-cercle isopérimètre.*

3° Si un cercle vaut la somme ou la différence de deux autres, sa circonférence sera moindre ou plus grande que la somme ou la différence des deux autres circonférences.

4° *Le carré est plus grand que tout secteur circulaire isopérimètre.* Réciproquement, *le carré équivalent au secteur circulaire a toujours un périmètre moindre.*

5° *La somme des mesures de l'arc en degrés et du rayon en mètres étant donnée, le secteur circulaire est un maximum quand ces deux mesures sont égales.* Réciproquement, *la somme est un minimum quand l'aire du secteur est constante.*

6° *Parmi les secteurs circulaires isopérimètres ou équivalents entre eux, le plus grand ou celui de moindre contour a son arc numériquement égal au diamètre.* Chaque fois son aire est mesurée par le carré du rayon, et son angle au centre vaut $360° : \pi$.

7° *Le cercle est plus grand que tout secteur isopérimètre, et réciproquement.*

8° *Le trapèze circulaire, différence de deux secteurs circulaires semblables, est un maximum lorsque la différence des deux rayons vaut la somme des deux arcs.* La réciproque est vraie.

IX. Soit S l'aire du segment circulaire, dont a est l'arc, c la corde, f la flèche, r le rayon et d la distance de la corde au centre, d'où $r = d + f$. La décomposition de S en tranches, toutes de même hauteur x infiniment petite, donne, pour les expressions du volume et de la surface engendrés respectivement par S et a, tournant autour de la corde c,

$$\text{vol. } S = \tfrac{1}{6}\pi c^3 - S \times 2\pi d \text{ et surf. } a = c \times 2\pi r - a \times 2\pi d.$$

Nous avons supposé $r = f + d$; mais si l'on avait $r = f - d$, il est clair qu'il faudrait changer d en $-d$, dans les expressions de vol. S et de surf. a, en vertu de l'analogie complète; car ces expressions subsistent, quelles que soient les valeurs particulières des éléments générateurs; de sorte qu'on peut avoir $f < r$, aussi bien que $f > r$; c'est-à-dire $r = f - d$, aussi bien que $r = f + d$.

Soit $F = S + R$, R désignant le rectangle de hauteur b et de base égale et parallèle à la corde c de a, à la distance z du centre, d'où $d = b + z$ et $r = f + b + z$. Si F fait une révolution autour de la base égale et parallèle à c, on trouvera

$$\text{vol. } F = c\,(b^2 + \tfrac{1}{6}c^2)\,\pi - F \times 2\pi z.$$

Cette expression est celle de la capacité d'un *tonneau*; or, on peut mesurer, sur ce tonneau, le rayon b de ses deux bases, la corde c et la flèche f de l'arc a. On en déduira donc r et z, puis l'angle A au centre, en degrés, la longueur rectiligne de l'arc a et l'aire S du segment; d'où il viendra l'aire F et tout ce qu'il faut pour calculer vol. F, ainsi que la surface courbe intérieure du tonneau, laquelle est exprimée par $c \times 2\pi r - a \times 2\pi z$.

Les distances négatives.

I. C'est par les proportions que la géométrie *construit* les figures *semblables* et qu'elle *mesure* les différentes sortes d'étendues limitées, savoir: les *longueurs rectilignes*, les *aires* et les *volumes*, dont le mesurage *direct* serait impossible. La géométrie est donc à la fois *graphique* et *numérique*: elle suppose souvent la connaissance des calculs *arithmétiques* et *algébriques*, lesquels sont nécessaires pour construire la valeur cherchée, de la manière la plus simple, et en général pour déterminer les grandeurs inconnues.

Ces grandeurs sont toujours exprimées par des nombres abstraits, que l'on peut regarder comme les *rapports* de certaines droites *données*

à la même unité linéaire u; chaque droite étant représentée par une lettre, censée divisée par u, pour plus de simplicité, et les inconnues elles-mêmes étant désignées chacune par une lettre, également divisée par l'unité de même nature, *sous-entendue.* Fort souvent la formule se traduit par des proportions, tour-à-tour entre quantités continues et entre nombres abstraits, suivant qu'on supprime et qu'on introduit l'unité diviseur de chaque lettre; ce qui ne détruit point les proportions.

Les proportions entre nombres abstraits, représentés par des lettres ou des chiffres, ne sont que des *équations*, à *résoudre*, d'après les principes de l'algèbre. La résolution des équations conduit à des *formules*, qu'il faut *discuter* et *interpréter* géométriquement, quand il s'agit de la construction des figures. Ces formules présentent aussi des *valeurs singulières*, des *symboles*, à interpréter.

II. Les lettres représentant des nombres abstraits *quelconques*, la formule qui les renferme est, par cela seul, absolument *générale*, c'est-à-dire applicable pour toutes les valeurs numériques de ces lettres. Car la formule exprime la mesure de toutes les grandeurs comprises dans la même définition générale et dont le mode de génération est identique; la valeur particulière d'une lettre ne saurait donc changer aucunement le rôle que cette lettre joue dans la formule, expression numérique du résultat de la génération.

Or, les valeurs particulières des lettres sont parfois telles, qu'en déterminant la formule demandée, nous opérons, à notre insu, sur un ou plusieurs des *symboles* -5, $\sqrt{-4}$, $\frac{n}{0}$, $\frac{1}{0}$,..., *soumis alors aux mêmes règles de calcul que les nombres absolus et réels.* Le calcul des symboles est donc absolument inévitable en algèbre, par suite de la généralité des formules et pour leur conserver cette généralité si importante.

Non-seulement on opère souvent sur des symboles en algèbre; mais cela arrive toutes les fois qu'en raisonnant sur des grandeurs, on fait abstraction de leurs valeurs numériques individuelles : en particulier, c'est ce qui arrive, dans la géométrie, lorsque la figure se complique ou que les rapports qui en lient les parties se multiplient; parce qu'il n'est plus possible alors de discerner au simple coup-d'œil, l'ordre de grandeur et de situation de ces parties. C'est encore ce qui a lieu quand certaines parties proposées sont l'objet d'une recherche faite sur la figure et qu'on les suppose inconnues à la fois de grandeur et de situation. Enfin c'est surtout ce qui arrive quand on fait abstraction de la figure et qu'on se dispense de la décrire; de là cette généralité de conceptions et cette grande extension de la géométrie,

où l'on considère les objets dans l'espace; et de là aussi la géométrie *analytique* et l'interprétation des symboles.

III. Comme il n'y a point de quantité plus petite que le *rien*, le *zéro absolu*, et que plus une quantité a d'unités plus elle est grande ; il semble d'abord que les *inégalités* $-4 < 0$ et $-9 < -2$ soient absurdes. Mais elles sont vraies, par extension d'idée et en appelant encore *quantité* le *reste* de la soustraction, lorsque celle-ci est impossible et donne un *terme soustractif*. Or, -4 n'est pas une *quantité*; c'est simplement une soustraction indiquée, dont le plus grand nombre ω est *sous-entendu*, comme n'étant pas l'objet du calcul actuel. Mais si l'on fait reparaître ce nombre, que l'on peut toujours supposer propre à rendre possible chaque soustraction, il est clair qu'au lieu de $-4 < 0$ et $-9 < -2$, on aura les deux *inégalités* évidentes $\omega - 4 < \omega$ et $\omega - 9 < \omega - 2$. Ainsi désormais toute quantité négative isolée ne sera, pour nous, *qu'une soustraction indiquée, dont le plus grand nombre ω sera sous-entendu, comme ne devant pas être soumis au calcul.*

IV. La généralité complète qu'il faut accorder aux règles et aux formules numériques, en vertu du principe d'analogie et pour simplifier l'étude de l'Algèbre, ne conduit pas seulement au calcul des quantités négatives isolées; mais de plus, elle fournit immédiatement les règles de ce calcul. *Il suffit de faire reparaître le plus grand nombre ω, sous-entendu dans chaque soustraction indiquée.*

Observons toutefois que, pour la clarté, chaque règle doit se tirer de la définition de l'opération dont elle fournit le résultat; mais alors, pour que l'analogie complète soit maintenue, il faut que la définition ait la plus grande extension possible et soit absolument générale. Ainsi pour le *calcul algébrique*, il faut poser les définitions que voici:

1° L'*addition* est une opération par laquelle on réunit plusieurs quantités, de même nature, affectées des signes $+$ et $-$, pour en faire une seule, appelée *somme*.

2° La *soustraction* est une opération par laquelle, connaissant la somme de deux quantités et l'une de celles-ci, on trouve l'autre, appelée *reste*, *excès* ou *différence*.

3° Dans la *multiplication*, le *produit* se trouve en opérant sur le *multiplicande*, comme le *multiplicateur* en opérant sur l'unité.

4° Dans la *division*, on trouve le *quotient* second facteur du *dividende* donné, connaissant le premier facteur, appelé *diviseur*.

5° Enfin, vous donnez à la définition de l'exposant x la plus grande extension possible et vous procédez par analogie, en disant que, dans a^x, il y a x facteurs a, lorsque l'exposant x est un nombre ou un

symbole quelconque. Il est bien facile ensuite d'en tirer la signification précise de l'exposant fractionnaire, positif ou négatif, de l'exposant irrationnel ou imaginaire, et par suite le calcul des exposants d'une nature quelconque.

V. Le calcul des symboles étant démontré, il est facile de procéder à leur *interprétation*, dans les problèmes numériques. Et d'abord x étant la grandeur inconnue, si l'on trouve $x = - a$ ou $- x = a$, il s'ensuivra qu'on aura désigné par x ce qu'on aurait dû représenter par $- x$; donc x devra diminuer ce qu'il augmentait ou augmenter ce qu'il diminuait; c'est-à-dire que le nombre inconnu x devra être pris dans une *acception opposée*.

En général, *toute quantité négative isolée doit être prise dans une acception opposée, pour avoir le problème résolu par elle.* Ainsi — 4 jours *à venir*, — 4 francs de *bien*, — 4 degrés *au-dessus* du zéro,..., signifient respectivement 4 jours *passés*, 4 francs de *dette*, 4 degrés *au-dessous* du zéro, etc. C'est ce qu'on vérifie aisément par divers problèmes algébriques, où $- a$ n'est au fond que $\omega - a$, le nombre ω n'étant pas l'objet des calculs effectués; mais étant *sous-entendu* dans le problème proposé.

Si l'inconnue était un nombre *absolu*, n'ayant point de signification opposée, le signe — de la valeur de x proviendrait du changement de signes de quelques-uns des nombres donnés; *et pour savoir quels sont ces nombres, il suffirait de changer* x *en* — x *dans les équations proposées.* Car si l'on a trouvé $x = - 4$, d'où $- x = 4$, c'est qu'on désignait par x ce qu'il eût fallu représenter par $- x$; on doit donc substituer $- x$ à x, pour avoir les équations du problème dont 4 est la solution.

Telle est l'*interprétation des solutions négatives ;* d'où résulte immédiatement celle de tout *symbole*, *en remplaçant la soustraction qui produit l'absurdité, par une addition, et interprétant le changement de signe du nombre à soustraire, au moyen des nouvelles équations.*

Quant aux symboles *fractionnaires* ou *inexprimables*, ils ne désignent des *impossibilités* que parce que la quantité cherchée doit être un *nombre entier*; il faut donc, pour l'interprétation, écarter cette condition particulière, en changeant la nature de l'inconnue, de telle sorte qu'elle puisse être fractionnaire ou un nombre inexprimable.

VI. L'interprétation des symboles se présente dans *l'application de l'algèbre à la géométrie* et porte essentiellement sur les *distances négatives :* il en résulte la démonstration complète du double principe fondamental, que nous allons considérer.

Dans tous les problèmes sur les droites *numériques*, la distance $AP = x$ d'un point P au point A de la droite quelconque BC, *mobile* ou non autour de ce point A, est toujours liée à deux autres distances, sur la même droite, et aussi grandes qu'on voudra, savoir $AB = m$ et $BP = v$. De plus, cette *relation* dépend uniquement de la *position* du point P à l'égard de A; car suivant que P est situé *à droite* ou *à gauche* de A, on a nécessairement

B P A P C

$$v = m + x \text{ ou } v = m - x, \ldots (1)$$

et cela quel que soit le problème où x se trouve. Si donc on part toujours du cas où P est *à droite* du point A et où $v = m + x$, la longueur x sera toujours *positive* de A vers C et conséquemment *négative* de A vers B, *dans le sens directement opposé*, puisqu'alors P sera *à gauche* de A et qu'on aura $v = m - x$. Ainsi *la distance* x *doit recevoir le signe — quand elle est mesurée en sens directement contraire;* et réciproquement, *si elle reçoit le signe —, par le calcul, on doit supprimer ce signe et porter le nombre résultant en sens directement opposé, sur la même droite BC et à partir du même point A.* Ce *double principe* subsiste même lorsque la droite a tourné autour de A ou ce point glissé sur BC, *axe des distances x;* car on a toujours les deux relations (1).

En résumé, pour que le principe d'analogie ait lieu, dans toute son étendue, et que la formule soit absolument générale, il faut qu'elle puisse s'appliquer à la fois à toutes les valeurs numériques de chaque droite limitée qu'elle renferme et à toutes les positions de cette droite x autour de son *origine* A. Or, on réalise ces propriétés importantes de la formule, 1° *en y changeant* x *en* — x *lorsque la droite* x *doit se porter en sens directement opposé sur l'axe, pour une autre circonstance du même problème* (dont on trouve immédiatement ainsi la solution); 2° *en portant la droite* x *en sens directement opposé lorsque le calcul lui donne une valeur négative, celle-ci ne pouvant que se rapporter à une autre circonstance du problème proposé* (ainsi résolue sans aucun nouveau calcul).

Tel est le *double principe des distances négatives*, également applicable à des *aires* et à des *volumes:* il en résulte la *règle des signes*, dans la multiplication et dans la division, par quatre rectangles égaux à $R = bh$, assemblés autour d'un point sur le plan; on passe du premier R ou bh au second, de celui-ci au troisième et de ce troisième au quatrième. Ce double principe est indispensable à la *géométrie analytique*, pour la *discussion* des équations et la construction des *lignes*

et des *surfaces*, que ces équations *représentent* : c'est le principe d'analogie appliqué à la *forme* et à *l'étendue* des figures géométriques.

VII. Soit BC $= a$ la droite joignant les milieux fixes des deux bases $2b$ et $2c$ du trapèze T : Si les longueurs $2b$ et $2c$ parallèles restent constantes, les sommets du trapèze T décriront les circonférences B′ et C′ dont B et C sont les centres, b et c les rayons; et si de plus on a $b > c$, les deux côtés latéraux de T iront couper le *prolongement* de BC en un même point P, *pôle de similitude directe* des circonférences B′ et C′, tandis que les diagonales de T se couperont en un même point Q′, *pôle de similitude inverse* de B′ et C′, sur BC.

C'est ce qu'on démontre chaque fois par deux couples de triangles semblables; car les quatre proportions résultantes se réduisent aux deux BP : CP :: b:c et BQ : CQ :: b:c; d'où il vient BP : CP :: BQ : CQ. Si donc, par P et Q, on mène des *tangentes* à B′, elles seront aussi tangentes à C, et réciproquement: il y aura 4, 3, 2, 1 ou aucune tangente commune, suivant la *position relative* des circonférences B′ et C′, et selon les longueurs des rayons b et c.

Posant CQ $= x$, d'où BQ $= a - x$, on aura, pour calculer la position du point Q, la formule $(b + c)\, x = ac$; d'où en changeant c en $-c$ et x en $-x$, il vient, pour calculer la position du point P,

$$(b - c)\, x = ac.$$

Lorsque les longueurs a et b restent constantes, dans cette équation, et que c varie en augmentant, depuis $c < b$ jusqu'à $c > b$, et cela par degrés insensibles; il est clair que le point P s'éloigne de plus en plus; qu'il est *infiniment éloigné* lorsque la différence $b - c$ est *infiniment petite*, et qu'il cesse d'exister quand cette différence est rigoureusement *nulle*; vu qu'alors le *zéro* étant *absolu*, la distance x est donnée par l'équation impossible $0x = ac$ ou $x = ac : 0$.

Or, bien que l'inconnue x cesse d'exister quand $c = b$, les deux tangentes, *extérieures* à B′ et à C′, ont toujours lieu, aussi bien que le trapèze T : seulement T est devenu un parallélogramme. D'ailleurs pour *interpréter* le symbole $ac : 0$ et résoudre un problème analogue, avec les mêmes nombres donnés, il suffit de remplacer la soustraction $b - c$, qui produit l'absurdité, par l'addition $b + c$, en changeant c en $-c$: cela donne $(b + c)\, x = -ac$; donc x est *négatif* et détermine le point Q ; et ce point est le milieu de BC, dès que $b = c$. Enfin si $c > b$, x et $b - c$ sont négatifs et mesurés en sens respectivement opposés, sur les axes; les parallèles $2\,b$ et $2\,c$ ayant tourné au tour de leurs milieux fixes B et C.

On voit que toute quantité *variable* ne peut devenir *négative*, de *positive* qu'elle était, qu'en passant, soit par l'*infiniment petit* et le

zéro absolu, soit par l'*infiniment grand* et l'*absurde* ou la non existence.

Pareillement, la *fonction* d'une *variable* ne peut dévenir *imaginaire*, de *réelle* qu'elle était, qu'en passant par le *maximum* ou par le *minimum* de la variable proposée.

La théorie des *maximums* et des *minimums du second degré* fait partie de la discussion des problèmes de ce degré et doit entrer dans les éléments d'algèbre, comme fournissant un grand nombre d'applications utiles et remarquables : elle repose sur ce que le problème est impossible, ou plutôt la fonction inconnue, lorsque le radical est imaginaire. Mais on peut résoudre un problème analogue, avec les mêmes nombres donnés, en *interprétant* le symbole imaginaire; ce qui se fait toujours en remplaçant la soustraction sous le radical par une addition.

Par exemple, considérons les trois points A, B, C en ligne droite, les longueurs $AB = a$ et $AC = b$ étant données, et cherchons la distance x du point A à un point P de la même droite, de telle sorte que x soit *moyenne proportionnelle* entre les distances BP et CP.

Il est clair que B étant entre A et C, le point P pourra tomber hors des trois points, ou entre A et B, ou entre B et C : dans ce dernier cas, on a $x^2 = (x - a)(b - x)$. Discutant la formule, on verra que les deux solutions seront *positives* et *rationnelles* pour $a = 2n$ et $b = 12n$; *imaginaires* à interpréter, pour $(a + b)^2 > 8ab$; et que si a est constant, la variable b atteint son *maximum* et son *minimum*, pour $(a + b)^2 = 8ab$, qui est aussi la condition du maximum et du minimum de a lorsque b est donné invariable.

On pourrait examiner le cas où le point P tombant sur le prolongement de AC, la longueur $BP = y$ désigne la distance cherchée. Si alors $AB = a$ et $BC = c$, on aura $y^2 = (a + y)(y - c)$.

On voit, par les discussions précédentes, que l'interprétation des symboles, *dûs à la soustraction*, se fait toujours par celle des distances négatives; en sorte que la discussion des problèmes de *géométrie numérique* est ramenée au double principe démontré plus haut; lequel devient celui des *aires négatives*, dans la discussion du problème où, connaissant l'aire a enfermée par trois droites indéfinies, il faut mener à l'une d'elles la parallèle terminée aux deux autres, de telle sorte que le trapèze résultant ait une aire connue t.

Enfin, puisqu'il est évident que si, de la somme des n premiers termes d'une série, on soustrait la somme des $n - 1$ premiers, le reste sera le n ième terme; le calcul des quantités *négatives isolées* fournit immédiatement les sommations :

$$\int \pm n = \pm \tfrac{1}{2} n + \tfrac{1}{4} (1 \pm 1), \int \pm (2n-1) = \pm n,$$
$$\int \pm n^2 = \pm \tfrac{1}{2} n (n+1), \int \pm (2n-1)^2 = \pm 2n^2 - \tfrac{1}{2} (1 \pm 1),$$

et ainsi pour d'autres séries analogues ; le signe supérieur de $\pm$ ayant lieu chaque fois pour n impair.

D'après cela, si un promeneur va et vient dans une longue avenue et s'astreint à parcourir, en sens directement opposés, les chemins successifs 1 mètre, 3, 5, 7, 9, 11,..., on saura calculer sa distance x au premier point de départ, après le n ième chemin ; on pourra aussi calculer le chemin total parcouru y et le temps z de la promenade, si le promeneur fait 40 mètres par minute et qu'il emploie 6 secondes pour se retourner.

Les chemins successifs pourraient devenir de 2 en 2 fois plus grands, ou bien encore croître, soit comme les nombres entiers, soit comme leurs carrés ou leurs cubes, soit comme les carrés ou les cubes des nombres impairs, etc.

Le temps z de la promenade pourrait être donné, dans les hypothèses ci-dessus ; mais alors comme n doit être un nombre entier et que z est arbitraire, il faudrait lui donner la valeur propre à rendre n entier positif.

C'est-là un exemple où l'inconnue doit être un nombre *rationnel*, dans une équation du second degré. La géométrie en fournit plusieurs autres remarquables, comme quand on veut *assigner aux côtés d'un triangle, des valeurs entières quelconques, ou bien en progression arithmétique, et telles que l'aire soit chaque fois un nombre rationnel.*

Ce problème est susceptible d'un grand nombre de solutions, comme on sait, et fournit trois suites de valeurs entières correspondantes, soit pour les côtés du triangle rectangle, soit pour ceux du triangle acutangle ou du triangle obtusangle : il en résulte chaque fois des valeurs *rationnelles* pour chacun des *sinus* des angles.

On en déduit aussi plusieurs quadrilatères, dans chacun desquels les côtés étant des nombres entiers, l'aire et les diagonales sont des nombres exprimables.

II. *Examen comparatif des garances de Belgique et des garances étrangères*,

par M. L. DE KONINCK, professeur de chimie à l'Université de Liége, et M. J. T. P. CHANDELON, agrégé, chargé du cours de chimie industrielle à ladite Université.

INTRODUCTION.

La Garance, qui à cause de l'usage fréquent que l'on en fait dans les arts, a reçu le nom de *Rubia Tinctorum*, est une plante de la Tétrandrie Monogynie de Linné, et de la famille des Rubiacées de Jussieu. C'est sans contredit une matière tinctoriale de la plus haute importance, tant sous le rapport de la quantité des principes colorants qu'elle renferme, que sous celui de la diversité des belles teintes qu'elle fournit.

Cette plante est originaire de l'Orient, où sa culture est connue depuis un grand nombre de siècles (1); elle y porte le nom d'*Alizari*, nom qui, par la suite, a été donné, dans le commerce, aux garances qui n'ont subi aucune préparation préalable. Ce n'est que depuis environ deux siècles, que la culture de cette précieuse racine a été introduite en France, où depuis lors, elle est devenue une source féconde de prospérité.

Malgré l'assertion de C. Grégoire (2), qui affirme que sa culture était déjà assez étendue dans ce pays au treizième siècle, la plupart des auteurs n'en font remonter l'introduction qu'à la fin du seizième. C'est à Colbert que l'on dut les premiers encouragements de cette culture; plus tard, en 1756, Louis XV ordonna que ceux qui entreprendraient des plantations de garance dans des marais ou autres lieux non cultivés, seraient exempts d'impôts pendant l'espace de vingt ans. Ces encouragements, et surtout les grands avantages attachés à cette culture, ne tardèrent point à donner une extension considérable à cette nouvelle branche d'industrie. Ce fut principalement

(1) Dioscoride et Pline parlent déjà des belles teintures faites par les Persans et les Indiens, au moyen de la garance.

(2) *Dictionnaire des origines*, Art. Garance.

le comtat d'Avignon qui se distingua par la rapidité avec laquelle la plupart des propriétaires suivirent l'impulsion donnée par le Persan Altken que le gouvernement y avait envoyé, et dont les efforts ne furent couronnés des plus grands succès qu'après sa mort. Depuis lors, cette culture s'est propagée dans les contrées méridionales de la France, ainsi que dans plusieurs autres départements, et notamment dans ceux du Haut et du Bas-Rhin.

La Hollande ne resta pas aussi longtemps tributaire du Levant que la France; au seizième siècle elle soutenait déjà avec avantage la concurrence, et envoyait les produits de son sol dans toutes les contrées de l'Europe.

La Zélande, et en particulier l'île de Schoven, se firent le plus remarquer dans cette lutte commerciale. La Belgique, quoique plus rapprochée de ce dernier pays que la France, malgré la presqu'identité des mœurs et du langage, malgré le contact des deux peuples, fut plus lente à la suivre, et nous aurions de la peine à y signaler des traces de culture de la garance avant le commencement de ce siècle. Aujourd'hui même, nonobstant les efforts constants d'un gouvernement libéral et éclairé, malgré l'avantage que cette culture fait entrevoir à celui qui s'y livre, à peine pouvons nous citer deux ou trois provinces où l'on récolte de la garance; nous ne connaissons des plantations de végétal, que dans quelques localités de la Flandre-Orientale, d'Anvers et du Limbourg (1). Quoique nous soyons persuadés que la composition du sol a une grande influence sur la production de la matière colorante, il nous répugne de croire que c'est la nature seule du terrain qui soit la cause du peu de développement de cette industrie, dans notre pays; nous pensons qu'on doit plutôt en chercher la cause dans l'indifférence que la plupart de nos cultivateurs manifestent pour un produit dont ils ne connaissent pas encore bien la culture, et le respect qu'ils ont pour une routine aveugle qui leur a été transmise par leurs ayeux. Il ne serait pas impossible en outre, que la difficulté de se défaire d'un produit qui, pendant trois ans absorbe des capitaux sans rien produire, ne dut entrer en considération dans le peu d'empressement que l'on met à s'emparer de sa culture.

Le sol belge, si vanté pour sa qualité, ne doit pas manquer de terrain convenable aux plantations de garance; aussi espérons-nous, que cette culture si importante se répandra de plus en plus et que

(1) Ce ne fut qu'en 1823, que la garance fut plantée pour la première fois à Tronchiennnes-lez Gand (*Descript. de la cult. de la garance*, par Verplancke, p. 6.)

dans quelques années, la Belgique n'aura, sous ce rapport, rien à envier à ses voisins.

On rencontre dans le commerce différentes sortes de garances, que l'on désigne par le nom du pays d'où elles proviennent; ce sont :

1° GARANCE DU LEVANT (Azalis, Lizari-Izari, Ali-Zari).

2° GARANCE D'AVIGNON.

3° GARANCE DE ZÉLANDE OU DE HOLLANDE.

4° GARANCE D'ALSACE.

5° GARANCE DE BELGIQUE.

On distingue encore les garances, eu égard aux préparations qu'elles ont subies, par les dénominations suivantes :

1° ALIZARI, toute racine qui n'a point été moulue.

2° GARANCE NON ROBÉE, celle qui séchée, a été moulue sans qu'on ait séparé sa pellicule corticale.

3° GARANCE GRAPPE OU ROBÉE, la racine moulue, mais dont la pellicule corticale a été séparée au moyen du blutoir.

4° GARANCE MULLE OU BILLON, c'est-à-dire, les racines, l'épiderme, etc., séparés de la garance, soit à l'aide du blutoir, soit à l'aide du vent.

5° GARANCE S F, la racine séchée et moulue, mais dont on n'a pas enlevé l'épiderme.

6° GARANCE S F VÉRITABLE, la racine séchée qui a été passée d'abord sous une meule afin de détacher l'épiderme retenant toujours des matières terreuses, et ensuite au blutoir afin de la purifier.

7° GARANCE S F F; c'est la racine S F moulue de nouveau et séparée du parenchyme.

8° GARANCE EXTRA-FINE E X F; c'est la garance dont on n'a fait passer à la meule que la partie ligneuse de la racine.

Toutes ces variétés de garances semblent cependant contenir les mêmes principes colorants; c'est ce qui résulte des travaux que les chimistes ont publiés à ce sujet, et dont nous allons tâcher de donner un résumé aussi complet que possible.

Watt (1) paraît être le premier qui ait signalé dans la garance, l'existence probable de deux principes colorants, l'un *pourpre*, donnant sous l'influence des mordants, des teintes rouges, vives, et solides; l'autre *fauve* ne servant qu'à modifier et altérer les belles couleurs de la première.

En 1823, M. Kuhlmann dans un excellent mémoire, inséré dans les Annales de chimie et de physique (2), nous a donné une analyse

(1) *Annales de Chimie*, t. IV, p. 104.
(2) T. XXIV, p. 225.

très-détaillée de la garance. Il y admet l'existence de deux matières colorantes, la première *rouge*, la seconde *fauve* (1).

Le travail de ce chimiste distingué paraissait avoir d'autant mieux fait connaître le principe colorant rouge de la garance qu'il était parvenu, disait-il, à l'obtenir crystallisé; aussi la surprise fut-elle grande, lorsque MM. Colin et Robiquet (2) déclarèrent dans un mémoire lu à l'Institut le 25 juillet 1826, que malgré toutes les précautions qu'ils avaient prises, pour obtenir ces cristaux et tout en suivant le procédé de M. Kuhlmann, ils n'avaient jamais pu réussir à se les procurer. Ils annoncèrent en même temps, qu'ils étaient parvenus à isoler deux matières colorantes, l'une rouge, cristallisée, qu'ils nommèrent *Alizarine*, l'autre d'une couleur plus pourpre, qu'ils crurent d'abord n'être qu'une modification de la précédente, mais à laquelle ils appliquèrent cependant le nom de *Purpurine*. Ce ne fut que plus tard (30 juillet 1837) qu'ils l'admirent définitivement comme principe colorant particulier.

En 1827, MM. Gaultier de Claubry et Persoz (1) publièrent que M. Kuhlmann d'une part et MM. Colin et Robiquet de l'autre, n'avaient point obtenu la véritable matière colorante de la garance et pour preuve, ils alléguèrent : *qu'en répétant les expériences indiquées par ces chimistes, ils n'ont pu obtenir, au moyen de la matière colorante isolée, la même teinte que celle que fournit la garance du commerce.* Selon eux, la garance renfermerait toujours deux principes colorants, mais l'un *rouge* et l'autre *rose;* ce dernier serait la *purpurine* de Robiquet; ces deux matières ne sont pas cristallisables.

Dans un second travail, M. Kuhlmann a reconnu que le principe colorant *rouge* de la garance, qu'il avait décrit en 1823, contenait de la potasse. Dans ce travail il considère l'*Alizarine* de MM. Robiquet et Colin, comme la matière colorante rouge à l'état de pureté.

Il a décrit en même temps un autre principe colorant jaune qu'il a nommé *Xantine*. Celui-ci serait contenu, selon lui, dans la partie fauve de la racine.

Enfin le docteur Runge a publié dans les Annales de la société d'encouragement de Berlin, un mémoire intitulé : *Monographie de la garance*, dans lequel il annonce avoir isolé sept principes différents, dont cinq forment des composés colorés et dont trois seulement sont

(1) *Journal de Pharmacie*, t. XIV, p. 354.
(2) *Ann. de Chim. et de Phys.*, t. XXXIV, p. 225.
(3) *Ann. de Chim. et de Phys.*, t. XLVIII, p. 71.

des matières colorantes appliquables sur les tissus. Ces principes sont :

1° Matière colorante pourpre.
2° » » rouge (1).
3° » » orangée.
4° » » jaune.
5° » » brune.
6° Acide garancique.
7° » rubiacique (2).

Les trois premiers seulement présentent de l'intérêt pour les arts. D'après M. Berzélius il paraîtrait, que c'est le docteur Runge qui, sans trancher cependant nettement la question, serait parvenu à se rapprocher le plus de la vérité.

Quelques expériences que le célèbre chimiste suédois a faites sur cette racine, l'ont conduit à émettre cette opinion (3) : comme nous la partageons complètement, c'est d'après ce travail que nous nous sommes dirigés dans la recherche de la quantité des matières colorantes des différentes garances que nous avons soumises à l'analyse. Nous sommes convaincus, au reste, que toute autre méthode ne pourrait fournir des résultats plus exacts.

Notre mémoire est divisé en trois parties : dans la première nous avons cherché à constater la quantité de matière colorante que contient la garance belge comparativement à celle contenue dans les meilleures garances étrangères ; dans la seconde nous avons examiné si, à l'aide de certains procédés, on ne pourrait pas obtenir des garances indigènes, les mêmes nuances que des garances étrangères, et dans la troisième, nous avons tâché de résoudre le problème, si par l'âge il y a ou non amélioration des garances.

PREMIÈRE PARTIE.

Diverses circonstances peuvent influer sur la quantité de matières colorantes des différentes qualités de garance que l'on trouve dans le commerce ; le climat, la nature du sol, l'âge de la racine, la variation même des saisons, sont autant de causes qui peuvent modifier

(1) Cette matière colorante paraît être identique avec l'alizarine de Robiquet.

(2) Depuis que le mémoire de M. Runge a été publié, l'un de nous a eu l'occasion de faire sa connaissance et a pu s'assurer par lui même de l'exactitude de tous les résultats donnés par ce chimiste distingué.

(3) *Lehrbuch der chemie*, dernière édition, t. VII. p. 26.

le principe colorant. A *Palud* près d'Avignon, partout où le terrain est calcaire, il se produit de la garance rouge, tandis que sur les points où le sol contient moins de carbonate calcique, on ne récolte jamais que la variété rose ou jaune.

Cette modification de la couleur de la garance, dépendrait donc de la composition du terrain, et l'observation que nous devons à M. Fabre, cultivateur très-instruit et propriétaire d'une partie du Palud, que les garances jaunes ou rosées, transplantées dans le terrain calcaire deviennent rouges et vice-versâ, confirment pleinement cette opinion.

Pour nous assurer si nos garances ainsi que celles de Zélande qui appartiennent aux variétés jaunes ou rosées, contiennent autant de matière colorante que les garances rouges d'Avignon, nous avons suivi le procédé de M. Runge (1).

Cette méthode consiste à laver cinq ou six fois la garance avec de l'eau de 11° à 16°, à traiter le résidu par trois fois son poids d'alun, et 17 1/2 fois son poids d'eau, à faire bouillir le tout pendant une heure et à filtrer bouillant. Le résidu est de nouveau soumis à l'ébullition pendant une demi heure, avec la même quantité d'eau et la moitié de l'alun employé précédemment; après filtration on laisse reposer pendant quatre jours, puis on sépare au moyen du filtre le précipité brun qui s'est formé et qui est en grande partie la matière colorante rouge.

On ajoute à la liqueur filtrée, de l'acide sulfurique dans la proportion des 3/4 en poids de la quantité de garance employée.

On doit avoir soin, avant de verser l'acide dans la liqueur, de l'étendre de trois fois son poids d'eau. Après quelques jours de repos, le liquide, qui d'abord était d'un beau rose et avait pris une teinte claire, dépose des flocons d'un rouge jaunâtre; c'est la matière colorante pourpre, contenant encore des traces de matière orange et jaune ainsi que d'alumine. Pour la purifier totalement, M. Runge la fait bouillir à plusieurs reprises, avec une grande quantité d'eau, et ensuite avec une dissolution étendue de chloride hydrique; il la lave, la sèche, la reprend par de l'alcool de 85 à 90 °/₀, puis il filtre le liquide bouillant; après filtration on obtient une liqueur d'un rouge foncé qui, évaporée jusqu'à pellicule, laisse déposer, par le refroidissement, la matière colorante pourpre en petits cristaux d'une couleur orangée; on la sépare de la liqueur au moyen d'un filtre; puis par des dissolutions et des cristallisations répétées, on la sépare des eaux

(1) Voyez *Runge*.

mères, et enfin on achève de la purifier complètement, en la redissolvant dans de l'éther sulfurique, qui en sépare encore une matière brunâtre. En opérant de cette manière sur 38 grammes, des trois garances indiquées et séchées à 100°, nous sommes parvenus aux résultats suivants :

MATIÈRES COLORANTES.	GARANCES		
	AVIGNON PALUD.	BELGIQUE.	ZÉLANDE.
Rouge.	0,760	0,770	0,750
Pourpre.	0,026	0,025	0,021

Ce qui donne à peu près 2 % de matière colorante rouge et 0,66 % de matière colorante pourpre.

D'après ces expériences, on voit que les quantités de matières colorantes sont presque les mêmes pour ces trois garances, et nous attribuons la légère différence que nous avons constatée aux pertes inévitables qui accompagnent toute analyse compliquée. Il ne serait pas impossible que cette différence dépendit encore de la pureté plus ou moins parfaite des garances employées. En effet, nous avons trouvé à peu près les mêmes rapports pour les résidus de cendres qu'ont laissés ces mêmes qualités de garance. (Voir plus loin.) Si cependant on s'en rapportait aux résultats des teinturiers, on pourrait croire que la *garance rouge d'Avignon* contient une plus grande quantité de matières colorantes, puisqu'elle donne des couleurs plus vives et plus solides que les autres variétés; mais depuis que Haussmann a prouvé qu'en ajoutant de la craie aux bains des plus mauvaises qualités de garance, on augmentait considérablement leur pouvoir tinctorial, nul doute que la préférence que les teinturiers accordent à la garance du Palud, ne provienne que de ce qu'elle renferme du calcaire, comme nous le démontrerons dans la suite, et que cette préférence ne soit illusoire. En effet, en comparant les teintes que nous avons obtenues par la garance rendue calcaire artificiellement, avec celles qui le sont par leur nature, il est impossible d'observer la moindre différence entre elles avant l'avivage (1); la faible différence, que

(1) Nous dirons une fois pour toutes que nos teintures ont été faites avec huit grammes de garance séchée à 100° à laquelle nous ajoutions un demi-litre d'eau distillée. La toile était mordancée par de l'acétate aluminique plus ou moins concentré, suivant les teintes que nous désirions obtenir. La quantité de craie a été dans tous les cas de 1/10.

l'on remarque après cette opération, ne peut provenir que de ce que la craie, qui se trouve dans la garance du Palud, est plus fortement divisée et se trouve par là plus intimement en contact avec la matière colorante qu'elle aide à fixer. On pouvait présumer d'avance ce que nous avons prouvé par expérience.

Quant aux autres principes organiques contenus dans la garance, nous n'avons pas cherché à reconnaître ni leur nature, ni leur quantité, parce qu'ils n'ont aucune influence directe sur la teinture et que d'autres chimistes, parmi lesquels nous citerons Bucholz, John et M. Kuhlmann, se sont occupés de semblables recherches. Nous nous sommes contentés de déterminer les matières inorganiques, dont la quantité pour 100, s'élève pour les trois garances qui suivent, à

AVIGNON.	BELGIQUE.	ZÉLANDE.	ALSACE (1).
8,959	7,363	12,563	11,46

DEUXIÈME PARTIE.

Un fait admis depuis longtemps en teinture, c'est qu'après les garances du Levant, ce sont les racines rouges d'Avignon dites du Palud, qui donnent les teintes les plus vives et les plus solides (2). Cette supériorité étant établie, les personnes intéressées à en connaître la cause, firent tous leurs efforts pour tâcher de la découvrir et pouvoir remédier par l'art à ce que la nature refusait. On crut d'abord que la différence si tranchée, qui existe entre les belles couleurs produites par les garances d'Avignon et celles des autres pays, pouvait dépendre du climat; mais comment expliquer alors la diversité de nuances que l'on observe dans les garances d'une même localité provenant d'une seule et même plante. Ce fut à Haussmann, fabricant de toiles peintes, à Loglebach, près Colmar (Haut-Rhin)

(1) Il a été employé pour ces expériences des racines de garance d'Avignon et de Belgique bien mondées avant de les réduire en poudre et de les incinérer. Celles de Zélande et d'Alsace ont été prises dans le commerce (qualité SF.).

(2) Ce fait est tellement démontré par la pratique, qu'à Elberfeld on ne se sert que de garance d'Avignon pour le rouge d'Andrinople, de celle de Belgique et de Zélande pour l'écarlate, de celle d'Alsace pour le brun et de celle des provinces du Haut-Rhin pour le rose. Ces renseignements nous ont été fournis par l'un des principaux industriels de cette ville. Le même nous a assuré que l'on y accorde généralement la préférence à la garance belge sur celle d'Alsace.

que fut réservé l'honneur d'en signaler la véritable cause. Il fut conduit à cette découverte, par l'effet du hasard. Cet industriel à qui nous devons une foule d'améliorations, était d'abord établi à Rouen, où il fabriqua des teintures du plus beau rouge. Plus tard, et après qu'il eut transporté son industrie à Loglebach, il lui fut très-difficile et même presque impossible d'obtenir les mêmes teintes qu'il produisait dans la première localité. Ne sachant à quoi attribuer cette différence, puisqu'il employait les mêmes garances, il fut conduit à en rechercher la cause. Après bien des tentatives, il trouva que l'eau dont il faisait usage dans sa nouvelle fabrique était pure, tandis que celle qu'il employait à Rouen était fortement calcaire. Haussmann imagina de remplacer ce sel, qui s'y trouvait naturellement dissous, par de la craie et réussit parfaitement. Depuis lors, il put reproduire ses belles teintes rouges et livrer au commerce des produits aussi parfaits que ceux qu'il avait fabriqués précédemment (1). Il fut donc le premier qui prouva que, par l'addition d'une certaine quantité de craie au bain de teinture, on pouvait obtenir des garances ordinaires, des teintes aussi belles et aussi solides qu'avec les meilleures racines (2). Plus tard MM. Schlumberger et Koechlin, en répétant ces expériences, furent conduits au même résultat; ils firent plus, ils prouvèrent, dans un mémoire inséré dans le *Bulletin de la société industrielle* de Mulhouse, que le climat n'était pour rien dans le développement de la matière colorante, et que c'est de la nature du terrain que dépend toute la différence que l'on remarque entre les garances non seulement des divers pays, mais aussi des mêmes localités. Cette opinion, il est vrai, a été combattue par Robiquet; mais il nous paraît que les raisonnements avancés par ce profond chimiste ne détruisent pas ceux de MM. Schlumberger et Koechlin, vu que d'après les expériences de Runge, les matières colorantes pourpres et oranges, ne souffrent pas l'addition de la craie, tandis que la matière colorante rouge du même auteur, donne avec ce sel des couleurs très-solides et d'une très-grande vivacité. Ainsi, il est reconnu qu'au Palud, les garances sont rouges lorsque le terrain dans lequel elles sont cultivées est calcaire, rosées lorsqu'il l'est moins, et jaunes lorsqu'il l'est très-peu, ou entièrement siliceux. Du reste, plusieurs expériences semblent mettre hors de doute l'influence du terrain sur la matière colorante; ainsi M. Schlumberger est parvenu à obtenir en Alsace des garances rouges en les cultivant dans un terrain calcaire entièrement artificiel. Enfin M. Persoz a lu une notice à la séance du

(1) *Dingler*, *Polytechnisches Journal.*

(2) *Ann. des Arts et Manufactures*, n° 24, an X, p. 240.

5 novembre 1836 de la société d'histoire naturelle de Strasbourg, dans laquelle il rapporte, qu'en employant en Suisse, où les eaux sont calcaires, un extrait de garance, il avait obtenu de très-bons résultats. A Mulhouse il a fait teindre avec de l'eau pure et avec de l'eau chargée de carbonate calcique; les deux produits furent également beaux avant l'avivage, mais les couleurs obtenues par l'eau pure ne tinrent pas. Ce même chimiste ayant analysé les cendres de la garance d'Avignon, y trouva des traces de carbonate calcique, tandis que celles d'Alsace n'en donnèrent aucunes. M. Persoz ajoute que M. Koechlin a essayé de cultiver de la garance dans son jardin dont le terrain est calcaire, mais que l'assimilation ne s'est point faite. Les racines ne contenaient pas de carbonate calcique (1), mais les matières colorantes étaient mieux développées.

Les racines étaient-elles rouges ou bien jaunes ou rosées? c'est ce que ce savant ne dit pas. A Elberfeld et dans plusieurs autres localités de l'Allemagne, ainsi qu'à Mulhouse, l'usage de la craie est généralement adopté, et c'est en grande partie à son effet, que nous devons attribuer les belles teintes que produisent les manufactures qui y sont établies.

Pour nous assurer par nous-mêmes du degré de certitude des assertions que nous venons d'énumérer, nous avons fait quelques recherches; nous avons commencé par soumettre à l'analyse les différentes terres dans lesquelles croissent les garances employées dans nos expériences.

Mais avant d'aller plus loin, nous croyons nécessaire de jeter un coup-d'œil sur cette contrée si importante, nommée PALUD, qui produit exclusivement la première qualité de garance d'Avignon.

Le Palud que l'un de nous a visité en 1837, est très-peu étendu et ne comprend qu'un espace de quelques lieues carrées; il ne s'étend que d'environ deux lieues du Nord au Midi, où il est limité par le Thor et Entraigues, et d'une lieue et demie de l'Est à l'Ouest, où ses limites vont toucher, d'un côté aux communes de Perne et de Villeron, et de l'autre à celles de St.-Saturnin.

Le terrain du Palud, qui ne produit que de la garance rouge, est tellement bien circonscrit, que nous avons remarqué dans certains endroits, le sol traversé par un simple fossé ou par un ruisseau, ne donnant d'un côté que de la garance rouge tandis que l'autre ne produisait que de la variété rosée ou jaune.

Le terrain du Palud est formé de plusieurs couches très-distinctes;

(1) *Institut*, t. II, p. 106.

la première ou la supérieure, a environ un pied et demi d'épaisseur et constitue la terre végétale ; elle est grise, très-légère, d'un grain uniforme, et ressemble assez bien à des cendres homogènes; elle est très-sèche de sa nature et se laisse facilement traverser par l'eau. D'après M. De Gasparin, elle doit contenir du chlorure calcique; cependant nous n'avons pu y trouver des traces d'aucun chlorure.

La deuxième couche ou moyenne, qui n'a qu'une épaisseur de 8 à 10 pouces, est plus blanche et se mêle souvent à la première, soit en préparant les terres pour y planter de la garance, soit en arrachant celle-ci; comme la précédente elle est très-calcaire.

Immédiatement au-dessous de cette couche, se trouve du tuf calcaire d'eau douce, renfermant une grande quantité de coquilles fluviatiles et de débris de végétaux. Ce tuf est blanc, a une épaisseur de 3 à 4 mètres, et est posé directement sur du gravier, sous lequel cependant il reparaît de nouveau. L'un de nous est redevable de tous ces détails à l'extrême obligeance de M. Fabre dont nous avons déjà parlé.

Le terrain qui produit la garance rosée, est beaucoup moins calcaire, et présente un tout autre aspect. Cette terre, quoique légère encore, est cependant plus jaunâtre et plus siliceuse. Les trois premières couches du Palud, que nous avons désignées par les numéros 1, 2, 3, suivant leur superposition, ainsi que les deux autres et les terres de Hasselt et de Mariakerke près de Gand (localités les plus remarquables de notre pays par la culture de la garance), soumises à l'analyse après avoir été complètement desséchées, ont donné les résultats que nous avons consignés dans le tableau ci-joint :

	Tuf calcaire. N° 3. Garance rouge. Palud.	Tuf calcaire. N° 2. Garance rouge. Palud.	Terre végétale. N° 1. Garance rouge. Palud.	Terre végétale. Garance jaune. Avignon.	Terre végétale. Garance jaune. Hasselt.	Terre végétale. Garance jaune. Gand.
Silice.	1,05	1,30	6,80	58,00	91,80	93,80
Alumine.	0,40	0,50	0,90	3,00	0,80	0,60
Oxide ferrique. . .	0,60	0,20	5,20	2,80	1,80	2,20
Carbonate calcique .	94,00	93,10	79,00	25,80	Traces.	Traces.
» magnésique.	3,80	3,76	3,82	10,00	Traces.	Traces.
Matières organiques.	Traces.	1,00	3,64	0,08	5,20	2,80
Perte.	0,15	0,14	0,64	0,32	0,40	0,60
	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

En jetant les yeux sur ce tableau, on voit de suite l'analogie de composition des terres de Belgique avec celles du département de Vaucluse, qui ne produit que de la garance jaune. Pour compléter ces recherches, nous avons cru devoir analyser les cendres que laissent les garances du Palud, de Zélande, d'Alsace et de notre pays. Voici leur composition :

	Garance du Palud.	Garance de Zélande.	Garance de Belgique. Saint-Nicolas.	Garance d'Alsace, Analyse de Mr Kuhlmann (1).	Garance d'Alsace, Analyse des Auteurs.
Carbonate calcique . .	35,165	6,081	7,9700	31,342	20,621
Clorure idem. . .	6,044	» »	5,4052	» »	» »
Carbonate potassique. .	5,384	2,538	53,7264	7,919	7,492
Chlorure idem. .	5,934	4,253	» »	47,181	Traces.
Carbonate magnésique .	4,401	» »	» »	» »	» »
Sulfate potassique. . .	7,157	» »	14,9351	2,147	» »
Silice	14,285	43,158	5,2702	1,342	42,955
Oxide ferrique et alumin.	15,540	37,270	Traces	» »	11,340
Phosphate potassique. .	5,150	1,391	4,3127	2,483	6,934
Idem calcique. . . .	» »	4,162	7,1068	5,504	9,312
Perte.	0,940	1,147	1,2706	2,082	1,346
	100,000	100,000	100,0000	100,000	100,000

En comparant ces deux tableaux il est facile de se convaincre que la quantité de calcaire que renferment les terres, est en rapport direct avec la qualité des garances ; ainsi nous voyons que la terre végétale

(1) Nous étions d'autant plus désireux de pouvoir constater par nous-mêmes la quantité de carbonate calcique qu'elle pouvait contenir, que M. Kuhlmann y a trouvé presque la même quantité de ce sel que dans la meilleure garance d'Avignon. Par ce résultat, il est en opposition directe avec celui que nous avons obtenu et avec ceux qu'ont annoncés MM. Schlumberger et Persoz. Ce dernier dit même dans une notice que nous avons déjà citée, qu'il n'a pas trouvé la moindre trace de calcaire dans la garance d'Alsace ; nous sommes donc portés à supposer que M. Kuhlmann a été induit en erreur et que, dans ses recherches, il s'est servi de garances d'Avignon, et non de celles d'Alsace, comme il a pu le croire.

du Palud, renferme 79 % de calcaire, tandis qu'il n'existe que des traces dans celles de Gand et de Hasselt, de même les cendres des garances qui croissent dans le premier de ces terrains contiennent jusqu'à 35 % de craie, tandis que les racines cultivées dans la seconde n'en fournissent qu'une quantité très-faible.

Mais si notre constitution géologique refuse à nos garances cette craie si importante pour la solidité des couleurs, du moins pouvons nous y remédier en employant des eaux calcaires ou en ajoutant de la craie au bain de teinture. Par ce moyen, nous avons obtenu avec les garances indigènes des nuances à peu de chose près, aussi solides et aussi belles qu'avec celles d'Avignon.

Une chose digne de remarque, c'est qu'au sortir du bain, les échantillons teints sans addition de craie, ont tous la même nuance; mais elles se comportent différemment à l'avivage; la couleur des tissus teints par la garance sans craie, a perdu de son intensité, et ce qu'il y a de plus singulier, c'est que si l'on ajoute du carbonate calcique aux bains de garance d'Avignon, les teintes sont bien moins belles, bien moins solides, que celles qu'elles fournissent sans cette addition. L'on pourrait croire, peut-être, que la craie exerce sur les garances d'Avignon une action mécanique, mais ce serait une erreur; car d'un côté, il résulte d'expériences faites par M. de Hemptinne que les garances avec des eaux calcaires naturelles ou avec des eaux pures mais avec addition de craie, occasionnent une perte de matière colorante; d'un autre côté, M. Runge (1) a démontré, qu'une addition d'un tiers de son à un bain avec excès de craie, neutralisait en grande partie l'action malfaisante de celle-ci, et pourrait, par conséquent, servir à l'avivage. L'action du son, est du reste facile à expliquer, si l'on fait attention aux propriétés que l'auteur attribue à ses différentes matières; le pourpre et l'orange de la garance, dit-il, sont rendus plus clairs par cette addition, tandis que le rouge en est plus foncé; or, comme le rouge est la principale matière qui se fixe sur les tissus, que c'est lui qui donne les teintes les plus brillantes, ils seront d'autant mieux teints, que les quantités d'orange et de pourpre seront plus faibles; Runge recommande d'en employer au moins trois fois le poids du tissu mordancé.

Plusieurs industriels ont avancé que par leur lavage, ou la fermentation de la garance, l'on obtenait des nuances plus fournies et plus belles. Cette opinion quoique semblant reposer sur des données théoriques assez exactes, nous paraît cependant erronée : en effet, l'on

(1) Mémoire cité.

sait qu'en lavant la garance à l'eau froide, on enlève la plus grande partie des matières colorantes jaunes ou oranges; mais on enlève aussi une certaine quantité du principe rouge, comme le prouve un échantillon que nous avons teint dans des eaux de lavage de la garance de Saint-Nicolas.

En outre la garance ne s'améliore pas par les lavages; c'est ce que démontrent encore les tissus que nous avons teints avec de la garance lavée et non lavée en quantités égales et mises dans les mêmes circonstances.

Ces dernières expériences nous ont fourni l'occasion de faire une observation assez curieuse. Les eaux de lavage, qui avant que nous y eussions plongé notre toile mordancée étaient d'un jaune foncé, sont devenues, immédiatement après son immersion, d'un rouge intense, et la toile elle-même a pris cette couleur. Nous reviendrons sur cette observation dans le chapitre suivant. Nous concluons donc de nos expériences, que l'on peut, dans la plupart des cas, remplacer la garance d'Avignon ou de Zélande par celle de notre pays, en ayant soin d'y ajouter 1/10 de craie.

TROISIÈME PARTIE.

L'opinion que les garances s'améliorent par l'âge est assez généralement reçue, tant par les industriels qui en font usage, que par les personnes qui ont fait quelques recherches à cet égard. Aussi les garances qui ont quelques années de tonneau, se vendent-elles constamment à un prix plus élevé que celles qui sont récoltées récemment. Hâtons-nous cependant d'ajouter, que les fabricants de garance sont portés à propager et à entretenir ces idées, pour ne point perdre l'intérêt d'un capital improductif, qui reposerait dans leurs magasins, si l'on parvenait à démontrer que l'amélioration des garances par l'âge est nulle et qu'elles restent stationnaires. Cette question, qui paraît simple et facile, n'est cependant pas encore résolue définitivement; nous mêmes n'étant ni fabricants ni industriels, n'osons prétendre y avoir porté la dernière main, car n'ayant pas à notre disposition des masses assez considérables de garance pour faire nos expériences sur une grande échelle, nous nous sommes vus forcés d'opérer en petit.

Nous admettons, pour le moment, que l'amélioration des garances, par l'âge, soit prouvée, afin de traiter plus facilement des différents agents qui peuvent contribuer à cette amélioration; ces agents sont : 1° l'air

par l'oxigène qu'il contient, 2° l'humidité, 3° la température, et 4° les matières, tant organiques qu'inorganiques, renfermées dans les racines.

D'après les belles expériences de M. Decaisne (1) la matière colorante de la garance, est primitivement jaune. Ce botaniste, ayant exposé à l'action de différents gaz, des tranches de racines privées du contact de l'air, a remarqué que l'oxigène et l'acide carbonique, n'exerçaient aucune influence sur ces tranches, qui répandaient un suc jaune, aussi longtemps que les gaz étaient parfaitement secs; mais qu'aussitôt qu'il y ajoutait un peu d'eau, le principe colorant jaune, devenait rouge, au contact de l'oxigène. L'acide carbonique et, ce qui paraît étonnant, l'eau oxigénée n'ont pas manifesté la moindre action. M. Decaisne conclut de ses expériences *que la coloration en rouge est un phénomène chimique tout-à-fait indépendant de la vie, et que la coloration en jaune paraît résulter d'une action vitale qui empêche l'autre.*

Dans une note inserée dans le 73me volume des *Annales de chimie et de physique,* Robiquet combat l'opinion de M. Decaisne et cherche à prouver que la principale matière colorante de la garance, ou l'*alizarine* préexiste dans les racines, et est *produite par l'acte de la végétation telle qu'elle se combine avec les différents mordants pour former cette grande variété de couleurs que le teinturier produit avec cette précieuse racine.* A cet effet Robiquet fait observer que l'oxigène sec, n'a aucune action, que *bien que les tranches des racines soient fraîches, c'est-à-dire humides, il faut en outre et de toute nécessité le concours d'une certaine quantité d'eau, et que ces tranches de racines plongées dans d l'eau oxigénée n'y éprouvent aucun changement de coloration.* Il fait dépendre la couleur uniquement de la présence, ou de l'absence d'un acide sur la matière colorante, de la préparation que les garances ont subie et de la fixation de la matière colorante sur la fibre ligneuse.

Nos expériences, tout en corroborant celles du savant botaniste que nous avons cité plus haut et qui par ses travaux rehausse à l'étranger l'éclat du nom Belge, détruisent complètement l'opinion de Robiquet, qui du reste n'était basée sur aucune expérience directe. En effet, l'on sait qu'en lavant de la garance à l'eau froide, on parvient à la priver, presque totalement, de toutes les matières colorantes jaunes qu'elle contient. Ayant donc pris 38 grammes de garance indigène pour en extraire les principes pourpre et rouge de Runge, nous fumes obligés de les laver à l'eau froide; les premières eaux de

(1) *Recherches anat. et physiol. sur la garance.* Mémoire couronné par l'académie de Bruxelles, 1837, p. 15.

lavage avaient une teinte d'un jaune fauve très-foncé; après filtration elles avaient encore la même nuance et étaient parfaitement transparentes : elles furent versées dans un vase étroit et très-élevé, et déposées dans un lieu bien aéré. Au bout de quelques jours, nous vîmes que la surface du liquide était devenue d'un rouge pourpre, et tenait en suspension, des petits flocons de la même couleur. Peu à peu ces flocons surnageant d'abord, se réunirent, en grande partie, au fond du vase et la liqueur était colorée en rouge à la partie supérieure et inférieure, tandis que la partie moyenne était encore parfaitement transparente et faiblement colorée en jaune. Nous séparâmes ce précipité et le recueillîmes sur un filtre; l'ayant repris ensuite par l'eau, nous avons pu y teindre une toile mordancée qui a pris une très-belle nuance rouge. Si donc dans cette expérience, le lavage n'avait servi qu'à enlever l'acide libre sous l'influence duquel la garance reste jaune suivant Robiquet, pourquoi s'est-il formé une matière colorante rouge sous cette influence ? D'ailleurs cette propriété de jaunir les garances n'appartient pour ainsi dire qu'aux acides énergiques, tandis que les acides faibles et surtout les acides organiques, même les plus forts, parviennent à peine à changer la nuance.

Cette observation nous a conduits à faire encore une autre expérience. Immédiatement après le lavage d'une certaine quantité de garance de Saint-Nicolas, nous avons plongé dans la liqueur jaune qui en provenait, une toile non mordancée et qui y est restée pendant quelques heures à l'abri du contact de l'air. Elle y a pris une teinte jaune; au sortir de la liqueur, elle fut immédiatement coupée en deux parties, dont l'une fut introduite dans un flacon contenant de l'oxigène, et l'autre dans un second flacon rempli d'acide carbonique; les deux flacons furent hermétiquement fermés et déposés dans une étuve, dont la température d'environ 30° était assez constante, afin d'activer l'action des gaz sur la matière colorante. Au bout de quelques jours, la toile, en contact avec l'oxigène avait acquis une couleur d'un rouge pourpre, tandis que l'autre n'avait subi aucune variation. Ces expériences nous prouvent donc, que l'action de l'air sur la matière colorante jaune et la transformation de celle-ci, au moyen de cet agent chimique, en matière colorante rouge, sont incontestables et nous croyons, avec M. Decaisne, que la matière colorante primitivement jaune est soluble dans l'eau, tandis que lorsqu'elle s'oxide, elle devient rouge et à peu près insoluble dans ce liquide. Il est probable qu'elle subit une métamorphose analogue à celle qu'éprouve l'indigo, qui d'abord blanc et soluble, circule dans les vaisseaux des plantes qui le fournissent, et ne devient bleu et insoluble que par le contact de l'air et par l'absorption

d'une partie de son oxigène. Nous sommes même portés à croire, qu'il n'existe dans la garance, qu'une seule et même matière colorante susceptible de se métamorphoser dans les divers produits signalés jusqu'à ce jour, par les différents chimistes qui se sont occupés de leur étude. Voici encore une expérience qui tend à confirmer cette opinion : si à une dissolution aqueuse de garance, on ajoute une certaine quantité de sulfate ferreux, elle se transformera immédiatement en un liquide d'un brun olivâtre. Si, après ce mélange, on précipite la liqueur par de l'ammoniaque caustique ou par un autre alcali, on aura un précipité d'oxide ferreux, qui entraînera la presque totalité du principe colorant, lequel ne se dissoudra pas dans un excès d'ammoniaque ou d'alcali. Si après avoir filtré et lavé rapidement le précipité, on le redissout dans de l'acide sulfurique faible qu'il suffit à cet effet de jeter sur le filtre, on entraîne tout l'oxide ferreux et ferrique; la liqueur passe à peu près incolore et il reste sur le filtre une substance rouge légère, insoluble dans l'eau et qui probablement est de l'alizarine. On voit que par les diverses réactions que nous venons d'indiquer, les matières colorantes jaune et fauve sont complètement disparues et se sont transformées en matière colorante rouge. Cette expérience nous paraît confirmer celle que M. Gustave Schwartz a communiquée en 1837 à la société industrielle de Mulhouse, et par laquelle il a cherché à prouver, ce qui ne nous paraît pas pouvoir donner lieu à la moindre contestation, que la matière colorante rouge n'est pas modifiée dans ses combinaisons avec les différents mordants. Cette expérience consiste à enlever la couleur aux toiles teintes par de l'alcool aiguisé de 1/10 d'acide sulfurique et à prouver que, quelle que soit la nuance, la matière colorante est une et constante pour toutes.

Il est hors de doute que, les garances récemment récoltées et préparées ont une couleur moins foncée que lorsqu'elles ont été conservées pendant un certain temps; cette coloration plus intense, ne peut donc provenir, en grande partie, que de l'absorption de l'oxigène, et elle sera d'autant plus foncée, que la quantité d'oxigène absorbé aura été plus considérable.

Cependant, d'après les expériences de M. Decaisne, cette action est nulle, aussi longtemps que l'oxigène est parfaitement sec et les conclusions que nous venons de prendre, seraient entièrement erronées, si nous ne remarquions, que les garances, en même temps qu'elles prennent une couleur plus foncée, s'emparent aussi d'une certaine quantité d'eau, qui se trouve constamment à l'état de vapeur dans l'atmosphère. Il n'y a donc aucun doute sur l'action oxidante de l'atmosphère.

On pourrait nous objecter cependant, que les poudres de garance sont en général fortement entassées dans des barriques et que par conséquent l'action de l'oxigène est nulle, ou presque impossible; mais ne sait-on pas que la plupart des poudres ont la propriété de condenser certains gaz, et certes, celles des garances ne doivent pas faire exception. Nous ferons observer en outre que l'absorption de l'oxigène et de l'humidité, ne peut avoir lieu que du dehors au dedans, et que ni l'un ni l'autre n'arrivent au centre, qu'au bout de plusieurs années. Le temps que nécessitera cette absorption sera toujours en rapport direct avec le diamètre des barriques.

Cette action de l'air avait déjà été remarquée avant la publication des expériences de M. Decaisne, par plusieurs auteurs, et entr'autres par MM. Dingler et Kurrer, qui disent dans l'une des notes intéressantes qu'ils ont ajoutées au traité de teinture de Bancroft, que l'action de l'air est indispensable pour bien teindre avec la garance. M. Kuhlmann et Fourcroy appliquent ce même principe aux teintures en général (1). MM. Chevreul (2) et Koechlin (3) ont aussi observé le changement de la matière colorante jaune de la garance, en matière colorante rouge. On sait en outre, que les alcalis et la plupart de leurs sels, ainsi que les sels de fer exercent, comme l'oxigène, une action colorante sur les garances. C'est ainsi, qu'en versant une dissolution d'ammoniaque, de potasse, ou de soude caustique sur de la poudre ou dans une décoction de garance, elles prennent à l'instant même une teinte d'un brun violet très-foncé. Les carbonates de ces bases et quelques autres sels à réaction alcaline possèdent la même action. Les sels de fer et de cuivre rendent les garances encore plus brunes que les réactifs précédents, tandis que le chlore et le chlorure de chaux les décolorent presque complètement, et ne leur laissent qu'une légère teinte jaunâtre, et que les acides dilués et faibles, surtout les acides organiques, n'ont presque pas d'action, ou se bornent à jaunir faiblement une décoction de garance à laquelle les alcalis peuvent rendre leur couleur primitive. En réfléchissant sur ces réactions, ainsi que sur la composition immédiate des garances, nous avons été entraînés à rechercher la véritable cause de l'amélioration des garances par l'âge.

D'après les belles expériences de Robiquet, l'orcine primitivement incolore, devient d'un rouge brun sous l'influence d'un alcali et

(1) *Ann. de Chim. et de Phys.* t. LIV, p. 290.
(2) *Chevreul*, p. 137, 30me leçon.
(3) *Bulletin industriel de Mulhouse* n. 3 p. 194.

de l'air. M. Stas a remarqué que la phloridzine au contact des gaz ammoniaque et oxigène humides, se transforme en une substance d'un beau bleu très-intense. Ne se pourrait-il pas aussi, que ce soit l'ammoniaque, qui, en réagissant simultanément avec l'oxigène de l'air sur la matière colorante de la garance, primitivement jaune, lui donne cette intensité de couleur qu'elle possède dans les vieilles garances?

Examinons si la composition des garances nous présente les éléments nécessaires pour soutenir une semblable opinion.

On sait que la plupart des substances azotées peuvent subir la putréfaction lorsqu'elles se trouvent dans des circonstances favorables, et par conséquent fournir une certaine quantité de carbonate d'ammoniaque, sel qui, comme nous venons de le voir, possède une action très-énergique sur les matières colorantes de la garance et leur donne une teinte d'un brun violet foncé. Il ne peut y avoir aucun doute que les garances ne contiennent de l'azote, puisqu'un mélange de poudre de garance et d'un excès de potasse caustique, soumis à l'action de la chaleur, dégage une odeur ammoniacale tellement prononcée qu'il est impossible de se tromper sur sa nature. D'ailleurs ce gaz ramène au bleu, le papier de tournesol rougi par un acide et donne d'abondantes vapeurs blanches lorsqu'on en approche une baguette imprégnée de chloride hydrique.

Nous avons obtenu le dégagement de ce gaz avec toutes les qualités de garance indistinctement, soit qu'elles eussent été cultivées dans un terrain calcaire, soit qu'elles provinssent d'un sol siliceux; cependant pour les premières ainsi que pour les vieilles, le dégagement était bien moins abondant, ce qui devait arriver, d'après la théorie que nous avons conçue, et qui ainsi s'est trouvée d'accord, nous semble-t-il, avec l'expérience. Outre les produits azotés dont nous avons constaté la présence dans les garances, il s'y trouve des matières gommeuses et sucrées. Or on sait combien la présence de ces dernières est favorable au développement de la putréfaction. Nous n'hésitons donc pas à admettre qu'elle se produit à l'intérieur des barriques dans lesquelles les garances sont enfermées et que c'est à elle, et par conséquent au développement d'une petite quantité d'ammoniaque et à la destruction d'une partie des matières mucilagineuses, qu'est due en grande partie l'augmentation de la matière colorante dans les vieilles garances, surtout lorsque celles-ci sont entourées d'une atmosphère humide. Mais, dira-t-on, comment expliquer la réaction acide de certaines garances, et surtout de celles non calcaires? Nous avons prévu l'objection et nous répondrons, en nous appuyant sur la propriété

de certains sels ammoniacaux, tels que le malate ammonique, qui ne peut exister à l'état sec que sous la forme de sel acide, qu'il n'est pas impossible, que les acides *rubiacique* et *garancique*, auxquels sont principalement dues les propriétés acides des garances, se trouvent également dans ce cas, ce qui est d'autant plus probable, que M. Kuhlmann les a confondus avec l'acide malique et que M. Chevreul les a pris pour de l'acide pectique. D'ailleurs on ne sait pas dans quel état se trouvent ces acides dans la garance même, et il serait encore possible qu'ils fussent combinés à une matière organique, et que ce ne fut que par l'action de l'eau que leur présence deviendrait appréciable au papier réactif; on sait au reste, que la propriété acide des garances s'éteint par l'âge, ce qui est encore une preuve en faveur de notre opinion.

Ce qu'il y a de plus particulier, c'est que l'on aura beau faire bouillir de la garance avec de la craie, aucun dégagement de gaz ne se manifestera, et la garance restera toujours acide, bien que la couleur soit fortement changée et soit devenue très-foncée; tandis que celle à laquelle l'addition de ces sels n'aura pas été faite, conservera constamment une teinte jaunâtre (nous voulons parler ici uniquement des garances du pays ou de Zélande). Cette observation prouve que, contrairement à l'opinion de Robiquet, la couleur peut changer, sans que les acides libres soient saturés, et qu'il faut bien que ce sel agisse sur toute autre matière que sur ces acides. Or, cette matière ne peut être qu'un ou plusieurs sels, se trouvant dans la racine, et qui seraient décomposés, ou bien d'après l'observation de M. Runge, la matière colorante même, ou enfin, tous deux à la fois. La craie peut être remplacée dans le bain de garance, soit par de la chaux caustique ou un alcali, soit par un carbonate alcalin quelconque, employé en petite quantité. C'est ainsi que les teinturiers ont tiré un très-grand avantage de l'emploi du carbonate sodique, de beaucoup préférable au carbonate potassique, à cause de ses réactions moins énergiques.

On sait encore, et nous l'avons confirmé par des essais, que la garance du Palud n'exige point d'addition de craie à la teinture, et que même cette addition exerce sur la toile une fâcheuse influence, ce qui a également lieu, avec les autres garances, lorsqu'on y ajoute une dose trop forte de craie ou de sel alcalin. Probablement qu'alors leur action ne se borne pas à modifier la matière colorante, mais se porte en outre sur les acides préexistants et sur le sel qui a servi de mordant et le décompose trop complètement pour que son oxide soit encore apte à recevoir la matière colorante et à s'y combiner. Ce qui nous a porté à émettre cette opinion, c'est que la présence d'une

petite quantité d'ammoniaque libre forne fortement le bain de garance, mais empêche presque totalement la fixation du principe colorant.

D'autres que nous, ont attribué l'amélioration des garances à la fermentation qui, d'après eux, aurait lieu dans l'intérieur des tonneaux. Plusieurs chimistes très-distingués ont partagé et soutenu cette opinion, et il n'y a pas longtemps encore, M. Schlumberger l'a défendue dans son mémoire adressé à l'Académie Royale des sciences et belles lettres de Bruxelles (1).

Nous avons répété ses expériences avec tous les soins possibles, et nous n'avons pu parvenir à ses résultats. L'emploi de la garance fermentée, ou non fermentée, ne nous a pas donné de différence très-sensible, en teinture.

Cependant MM. Dingler et Kurrer (2) paraissent également avoir retiré de l'avantage de la fermentation, tandis que MM. Streccius (3) et Runge (4) sont arrivés au même résultat que nous; de sorte que nous pensons avec Robiquet que la fermentation ne peut en rien augmenter le pouvoir tinctorial. Nous sommes loin cependant de contester son efficacité pour la préparation des laques, parce qu'on parvient de cette manière, à enlever plus facilement les matières étrangères qui pourraient altérer leurs teintes.

D'ailleurs, si l'opinion de M. Schlumberger était vraie, il faudrait obtenir par l'analyse, une quantité de matières colorantes plus grande; c'est à quoi nous ne sommes point parvenus.

Il se trouve évidemment dans les garances, des matières sucrées; les savantes expériences que M. Dobereiner a faites à ce sujet, sont trop concluantes pour oser en douter. Cet habile chimiste a même conseillé aux teinturiers, d'en extraire l'alcool au moyen de la fermentation, avant de les employer. Il a décrit à cet effet un appareil. Mais de l'existence du sucre dans une matière quelconque, à sa fermentation, il y a encore loin. En effet, plusieurs conditions indispensables sont requises pour qu'elle puisse s'établir; la première et la plus essentielle, c'est que le sucre se trouve suffisamment dilué, pour que ses molécules soient bien mobiles et puissent se décomposer à la faveur du ferment. En second lieu, la température n'exerce pas une moindre influence sur cette fermentation, et l'on sait qu'elle est entièrement impossible à 0° et même à quelques degrés au-dessus.

(1) *Bulletin du 9 mai* 1837, p. 205.

(2) *Dingler P. Journal*, t. XIII, p. 230 et t. XXIII, p. 73.

(3) *Schubart, Lehrbuch der Techn. Chemie.*, t. III, p. 286.

(4) Mémoire cité.

Ces conditions sont-elles réalisées dans la poudre de garance? Nous ne le pensons pas. Il est vrai que celle-ci attire peu à peu l'humidité, et que même son poids, suivant Dingler et Kurrer, augmente de 4 à 5 % au bout de trois à quatre ans. Mais cette quantité d'eau ne suffit point pour liquéfier le sucre (1).

D'ailleurs il y a dans les garances d'autres matières qui attirent l'humidité; telles sont les sels potassiques et le chlorure calcique que nous y avons trouvés. En admettant même que ce fût le sucre seul qui s'en emparât, cette quantité d'eau ne parviendrait pas encore à le convertir en sirop, et il est notoire, qu'à cet état de concentration le sucre peut se conserver, en le mettant même dans les circonstances les plus favorables à la fermentation. Du reste cette transformation devrait être accompagnée de dégagement d'acide carbonique, qui pourrait s'échapper des tonneaux, ou rester condensé avec l'air dans la poudre même.

Et cependant nous n'avons pu en recueillir que des traces, qui ont troublé l'eau de chaux, en chauffant de la garance au bain-marie. Cet effet a été obtenu aussi bien avec des garances jeunes qu'avec des vieilles, de sorte que cet acide ne provient pas de la fermentation. Il en est de même de l'acide acétique, qui certes, sous l'influence de l'oxigène, qui se trouve condensé dans la poudre, devrait immédiatement se former aux dépens de l'alcool. Nous avons distillé, mais en vain, de la garance âgée, à une faible chaleur avec de l'acide sulfurique; nous n'avons recueilli aucune trace de cet acide et pas la moindre odeur si caractéristique de ce corps ne s'est fait sentir. Il est vrai que le liquide que nous avons obtenu était acide; mais lorsqu'on y a versé de l'azotate argentique, il a donné un précipité blanc insoluble dans l'acide azotique, soluble dans l'ammoniaque et qui accusait par conséquent la

(1) Pour nous assurer quelles sont les substances qui absorbent plus particulièrement l'eau, nous avons fait l'expérience suivante : 70 gr. de garance de Zélande, récemment récoltée et parfaitement bien séchée, furent exposés pendant 48 heures dans une cave humide. La même quantité de garance, qui ne contenait plus de matière saccharine ni mucilagineuse, y fut placée en même temps et dans les mêmes circonstances; toutes deux avaient absorbé une assez grande quantité d'eau, car la 1re avait augmenté en poids de gr. 3,60 tandis que la seconde n'avait acquis qu'un excès de gr. 3,40. On voit donc par là que la différence est peu sensible, et qu'il est probable que ce ne sont pas les matières saccharines et mucilagineuses qui en absorbent le plus, mais que c'est plutôt par la matière ligneuse que cette condensation a lieu.

présence du chloride hydrique. Mais quelle modification la fermentation pourrait-elle apporter à la matière colorante? Aucune, si ce n'est de la dégager peut-être un peu de la matière mucilagineuse et sucrée qui l'accompagne, lorsqu'elle est récemment séchée, tandis que les produits de la putréfaction peuvent avoir une influence considérable sur les matières colorantes. Suivant M. Schlumberger la fermentation la désoxiderait. Mais alors, quelle est la substance qui opérerait cette désoxidation? serait-ce l'alcool qui s'emparerait de l'oxigène, pour se transformer en acide acétique?

Il serait plus rationnel, ce nous semble, si toutefois il y avait formation d'acide acétique, de la faire dépendre de l'absorp tion de l'oxigène de l'air, que de celui de la matière colorante. Si les choses se passaient comme l'avance M. Schlumberger, il faudrait que la matière colorante revint à la teinte jaune primitive, et c'est justement le contraire qui arrive, puisque plus les garances vieillissent, plus elles se colorent en rouge.

Nous avons, croyons-nous, par ce qui précède, suffisamment démontré que la matière colorante existe encore en grande partie dans les garances récentes, pour ainsi dire à l'état rudimentaire; que d'une part il y a absorbtion d'humidité et d'oxigène de l'air, tandis que de l'autre il y a commencement de putréfaction, et par conséquent action de l'ammoniaque ou de ses sels sur la matière colorante, et que c'est au concours de ces deux principes qu'est due l'amélioration des vieilles garances. Il nous reste encore à démontrer par des expériences, que cette amélioration a réellement lieu.

Un pharmacien eut l'obligeance de nous donner de la garance de Zélande qu'il conservait au moins depuis dix ans; elle avait été moisie et par conséquent elle avait perdu par la putréfaction ses parties mucilagineuses et saccharines; elle avait une couleur d'un sale brun et se mouillait difficilement par l'eau. Nous en teignîmes quelques échantillons, qui l'emportèrent de beaucoup par leur teinte, sur celles obtenues avec de la garance nouvelle.

Comme l'expérience que nous venons de rapporter pouvait encore laisser quelque doute sur la véritable amélioration de la garance, par l'âge, et que nous n'avions qu'un point incertain de comparaison, puisque les deux teintes pouvaient ne pas provenir de la même qualité de garance, nous avons tâché de reproduire le même effet sur une garance indigène, avec laquelle nous avons d'abord teint quelques échantillons; nous avons séché en outre au bain-marie une certaine quantité de cette même garance et en avons introduit une partie dans un flacon fermé à l'émeril, que nous avons placé à l'abri

du contact de la lumière, et une autre dans un sac de toile, lequel fut immédiatement transporté dans un lieu frais et humide, où l'air ne se renouvelait pas facilement. Au bout de quelques semaines, ce sac fut couvert d'une moisissure très-considérable, qui l'enveloppait entièrement. On laissa ainsi agir le tout pendant plusieurs mois, après quoi, on transporta la garance dans un lieu sec et aéré, où elle perdit bientôt la plus grande partie de son humidité. A l'ouverture du sac, nous avons trouvé la garance tout-à-fait changée de couleur, et semblable à celle qui nous avait été donnée. Son pouvoir tinctorial était considérablement augmenté, comme nous avons pu nous en convaincre par des expériences comparatives variées, dans lesquelles nous avons employé la partie qui avait été renfermée dans le flacon, et qui toutes ont été faites avec le plus grand soin.

De cette observation nous pouvons conclure que, l'amélioration ne peut provenir, ni de la fermentation, ni de la désoxidation des garances; car il n'y a pas de doute, que la fermentation n'a pas eu lieu, puisque la température du lieu où l'expérience s'est faite n'excédait pas 10°. Seulement nous avons hâté, en mettant la garance dans des circonstances particulières, ce qui se produit plus lentement dans les tonneaux que l'on a tort de conserver généralement dans des magasins très-secs. Nous sommes convaincus qu'il serait préférable qu'ils fussent renfermés dans des caves humides, où l'on obtiendrait, en quelques mois, l'effet, qui ne se produit qu'à la longue dans les magasins.

Nous citerons encore ici un dernier fait que nous venons de constater. Plusieurs flacons, bien bouchés, contenant de la poudre de garance d'Alsace, d'Avignon et du pays, des récoltes de 1835, de 1836 et de 1837, furent enfermés dans une même armoire assez humide avec des échantillons des mêmes qualités et des mêmes récoltes renfermées dans des sacs en toile ou dans des cornets de carton. Aujourd'hui les poudres hermétiquement préservées contre les agents extérieurs ont conservé leurs qualités primitives et ne se sont seulement pas tassées ni pelotonnées, tandis que les autres ont acquis une teinte rouge très-foncée et ne forment plus qu'un bloc. Ces dernières ont donné une teinte plus vive et une nuance plus fournie.

Pour compléter nos expériences, nous avons voulu constater, si l'âge des racines elles-mêmes pouvait également avoir de l'influence sur les matières colorantes. M. Fabre a bien voulu nous donner des garances du Palud, de 6 mois, de 18 mois et de 3 ans, âge auquel on les arrache ordinairement pour les sécher et les livrer au commerce.

Ces diverses racines furent séchées et pulvérisées exactement de la

même manière; nous avons teint ensuite, avec une même quantité de poudre de chaque garance, une même quantité de toile mordancée; ces trois échantillons, nous ont démontré suffisamment, que la quantité de matière colorante est aussi abondante dans l'une que dans l'autre, et qu'elle résiste également bien à l'avivage, résultat auquel nous nous attendions avec d'autant plus d'assurance, qu'il est généralement connu à Avignon, où il avait été communiqué à l'un de nous.

C'est ici le moment, croyons-nous, de dire un mot de la manière dont se fait le séchage des garances en France et en Belgique. Dans les pays méridionaux, les garances arrachées sont mises en tas et en plein air; mais comme cette opération se fait en général au mois de septembre, et que le soleil, à cette époque a encore assez de force, une grande partie de l'humidité quelles renferment s'évapore, ce qui facilite singulièrement la séparation de la terre adhérente, ainsi que des radicelles, etc. Ce mode de sécher a en outre l'avantage d'oxider plus ou moins la matière colorante. Ce n'est qu'après cette première dessiccation, incomplète il est vrai, qu'on transporte les garances dans des étuves, dont la température de 60° à 65° suffit pour les dessécher convenablement et les rendre propres à la mouture. Cette opération se fait au sortir de l'étuve. Celle-ci est généralement construite de manière à ce que la vapeur ne puisse s'en échapper qu'assez difficilement, pour que par son contact, plus ou moins prolongé, elle favorise encore l'action de l'air et oxide, de cette manière, plus complètement la matière colorante. Cette opération est connue par les fabricants sous le nom de *rosage*. Chez nous, où la végétation est moins active, la température moins élevée et où l'arrachage ne se fait guère qu'à la fin de septembre ou au commencement d'octobre, époque où déjà les pluies commencent à apparaître, il est impossible de procéder de la même manière. Aussi la dessiccation y est-elle tout-à-fait artificielle et se fait-elle entièrement à l'étuve. Nos étuves sont en outre construites différemment et de manière à laisser le plus d'issue possible à la vapeur aqueuse et par conséquent à empêcher presque complètement le *rosage*. Il serait bon, ce nous semble, de remédier à cet inconvénient et nous appelons sérieusement l'attention de nos fabricants de garances sur ce sujet; en modifiant la méthode de dessiccation d'après celle employée à Avignon, le fabricant aussi bien que le teinturier y trouveraient leur profit, l'un par un débit plus facile, l'autre par une augmentation de pouvoir tinctorial.

CONCLUSIONS.

Avant de terminer ce travail, nous croyons utile de nous résumer; nos expériences nous ont prouvé :

1° Que la quantité de matière colorante, contenue dans nos garances est la même que celles que renferment les garances étrangères.

2° Que nous pouvons obtenir de nos garances des teintes presqu'aussi belles et résistant aussi bien à l'avivage, que celles tirées des garances d'Avignon et de Zélande, si l'on a soin d'ajouter de la craie au bain de teinture; la quantité de ce sel ne doit pas excéder $\frac{1}{10}$ de celle de la garance employée, sans risque de devenir nuisible.

3° Que les garances s'améliorent par l'âge et que cette amélioration a lieu par la putréfaction des substances azotées de la racine et par l'influence simultanée de l'oxigène de l'air et de l'ammoniaque, sur les principes colorants; que ces principes sont produits par la modification qu'une seule et même matière subit, tant durant la végétation de la racine qu'après sa dessiccation et sa mise en tonneau.

Nous n'ignorons pas que la tâche que nous nous sommes imposée en entreprenant ce travail était difficile; mais nous espérons que si nous n'avons pas pu la remplir aussi complètement que nous l'avons souhaité, on nous saura gré de nos efforts et nous nous estimerons heureux, si notre travail peut contribuer à éclairer quelque peu une route que nous désirons voir parcourue par un chimiste placé dans des conditions plus favorables que nous, pour faire des expériences sur une échelle moins restreinte que celle à laquelle nous avons été forcés de nous tenir.

III. *Notice sur les mines de houille de Saarbrucke.*

PAR

M. LE SOINNE, professeur de métallurgie à l'Université de Liége.

ET

M. NAGELMAKERS, ancien élève de l'école des mines de Liége.

(*Planches* I et II.)

EXPLOITATION DES COUCHES PEU INCLINÉES ; MINE DITE GERHARDSBRUGE PRÈS GROSSWALD ET BAUERNWALD.

On exploite dans cette mine deux couches ; l'une, la supérieure, a 72″ soit 1m, 88 de puissance ; l'autre, l'inférieure, se trouve à une distance verticale de 60 lachter (le lachter = 6′8″) de la précédente et a une puissance de 104″ soit 2m, 72.

La première porte le nom de Heinrichflœtz et la seconde celui de Beustflœtz ; nous n'avons visité que la couche de Heinrich à laquelle on arrive par une galerie à double voie de chemin de fer.

Exploitation.

L'exploitation est très-simple et fort bien entendue. On commence par établir dans la couche une grande galerie horizontale de transport, qui sert, pour ainsi dire, de base à tout le système et à laquelle viennent se rapporter toutes les autres. A une distance de 30 à 35 lachter (de 63 à 73 mètres) dans le plan de la couche, on établit une autre galerie de transport, parallèle à la première, avec laquelle elle communique par une galerie d'inclinaison servant à l'airage.

L'espace situé entre les deux galeries d'allongement forme le champ d'exploitation.

On exploite le massif de veine ainsi divisé, par de petites tailles de 4 lachter (8m36) de front ; quand la couche est très-peu inclinée, les tailles sont menées perpendiculairement à la galerie de transport. Si l'inclinaison est plus forte, les tailles sont menées diagonalement. La taille n'aboutit à la galerie de transport que par une voie, la plus étroite possible et elle ne commence à prendre sa largeur que à 4 lachter en-

viron au dessus de la voie de transport; de cette manière les parois du maître niveau gardent toute leur solidité et on est débarrassé entièrement de l'entretien du boisage, quelle que soit la longueur du niveau. Les tailles montantes laissent entre elles une *serre* ou massif de 4 à 5 lachter (8^m36 à 10^m50). A des distances de 5 lachter environ, on perce ce massif pour raccourcir le parcours de l'air.

Pour rendre cette disposition plus facile, on commence la première taille montante près de la galerie d'inclinaison unissant les deux maîtres niveaux. Arrivé dans le plan de la couche, à une distance de 5 lachter, à partir du massif réservé, on pousse un chambrai d'airage jusqu'à la galerie d'inclinaison. On commence alors à ouvrir la deuxième taille montante et, arrivé à cette même longueur de 5 lachter, on se met en communication d'airage avec la première taille et ainsi de suite. On continue alors la première taille montante jusqu'au massif réservé en dessous du maître niveau supérieur (massif de 4 lachter environ), et on pousse en avant successivement toutes les autres tailles, ainsi qu'il vient d'être dit.

Il n'est pas nécessaire d'arrêter la première taille montante après le premier chambrai d'airage ; on peut la poursuivre jusqu'au massif réservé en dessous du maître niveau supérieur.

Quand plusieurs tailles montantes sont arrivées à leur limite, on perce le massif réservé au haut des tailles, pour raccourcir l'airage.

La galerie inférieure de transport n'est le plus souvent qu'un chambrai (voie percée en œuvre de veine sans avoir un airage séparé). Le niveau supérieur est assez souvent une petite taille de 1 1/2 à 2 lachter; cette différence entre les deux niveaux, est fondée sur la nécessité de donner aux parois du niveau inférieur, base de toute l'exploitation, toute la solidité désirable.

Quand on a achevé d'exploiter l'espace compris entre les deux niveaux, on établit un troisième niveau au dessus du second, à la distance de 30 à 35 lachter dans le plan de la couche, et on procède comme il a été dit plus haut.

Il se pourrait qu'il y eût plus d'avantage à commencer l'exploitation par en haut, et l'expérience a même démontré à Mons que dans des travaux d'exploitation menés de bas en haut, le combustible perdait de sa qualité à mesure qu'il se desséchait plus complètement.

Mode de travail d'une taille.

La couche dans laquelle nous avons vu travailler, est la Heinrichflœtz de 72 pouces de puissance; sa direction est Est-Ouest et elle

penche vers le nord de 8 à 10 degrés ; elle n'a pas de havage et sa houille est tellement dure, qu'on doit haver dans la pierre du mur.

On mène le Schramm (havage) d'abord dans le milieu de la taille, jusqu'à une profondeur qui varie de 30 à 40 pouces; on place ensuite à 40 pouces plus haut, une mine de la même profondeur que le schramm et dans laquelle on met une cartouche d'un quarteron ; on bourre avec le schiste lui-même sans aucune préparation ; on place ensuite une deuxième mine au-dessus de la première, près du toit et alors la veine à détacher et la portion du mur à haver se trouvent dégagées sur deux faces. On mène le schramm des deux côtés et on fait sauter la veine à la poudre sur les deux côtés également, jusqu'à ce qu'on ait atteint la largeur que la taille doit avoir.

L'exploitation ainsi conduite, n'est pour ainsi dire, qu'un travail préparatoire, car le mode le plus avantageux d'emporter la veine consiste dans l'exploitation à reculons (Rueckbau). On commence à exploiter de cette manière les massifs réservés entre deux tailles montantes ; on rejette derrière soi, les déblais provenant du havage et on n'emploie plus de poudre de peur de donner trop de mouvement au toit. Néanmoins le travail est beaucoup plus aisé que celui des tailles ordinaires ; aussi les ouvriers doivent-ils fournir une quantité de charbon plus considérable pendant leurs huit heures de travail.

Les outils dont ils se servent à la taille sont : le petit pic, pour faire le schramm, le pic plat (côpeu), le fleuret de mine, le bourroir, la curette, l'aiguille, la truelle et une espèce de panier à porter le charbon. Quand ils travaillent à reculons, ils ont en outre des gros pics, des coins de fer à manche de bois et des gros marteaux.

Distribution du travail et mode de paiement.

Il y a par tailles six hauer (ouvriers à la taille); ils travaillent de compagnie et doivent haver, remblayer, dépecer la veine et mettre les bois; ils doivent fournir chacun, dans un poste de huit heures, une quantité de charbon qui varie, suivant la facilité plus ou moins grande du travail, de 18 à 24 quintaux (927 à 1236 k°) et quand on travaille à reculons, de 25 à 30 quintaux (1287 à 1545 k°.)

On leur paie par fuder (30 q^x de Prusse, soit 1545 k°.) 27 sbg. ou 3 frs. 27 quand ils travaillent aux tailles, et 24 sbg. ou 2 frs 91 pour l'ouvrage à reculons. Là dessus ils doivent payer la poudre, le transport de la taille à la galerie principale, les réparations des outils, celle des brouettes. Ils doivent payer en outre la moitié des frais de réparation des chariots ; l'autre moitié est à la charge de l'entrepre-

neur du transport des houilles à l'aide de chevaux jusqu'au magasin ; ce dernier se charge en outre d'entretenir la route, depuis le magasin jusqu'à l'entrée de la galerie et il doit encore vider les chariots.

Si les ouvriers trouvent que leur tâche est trop forte, ils demandent à l'administration de faire faire une épreuve, qui a lieu de suite. Il y a dans ce district de mines, une cinquantaine environ d'ouvriers habiles choisis pour faire cette épreuve. On en prend six, qui remplacent pendant un poste, les ouvriers qui se sont plaints. Si la plainte est trouvée fondée, les frais d'épreuve sont à la charge de la houillère et l'ouvrier est indemnisé; dans le cas contraire, les frais d'épreuve sont décomptés sur son salaire. Afin qu'il ne puisse pas craindre que l'on choisisse des ouvriers trop robustes et trop exercés, on calcule que, si les houilleurs d'épreuve font un travail représenté par neuf, l'ouvrier qui s'est plaint, doit faire une somme d'ouvrage représentée par huit.

Mode de transport.

Le transport de la taille à la galerie principale a lieu avec des brouettes; il y a des tailles où le chariot lui-même peut arriver. Les hercheurs sont, comme nous l'avons dit, à la solde des ouvriers à la taille. Ils sont partagés en trois classes d'après leur force et reçoivent par poste de huit heures :

Ceux de la	1re	10 sbg.	0 pf.	= 1 fr.	21
Id.	2e	8	9	= 1,	06
Id.	3e	6	6	= 0,	79

Le transport sur la grande galerie à double voie, a lieu à l'aide du cheval et à l'entreprise. Quand il faut aller chercher les chariots pleins dans la mine même, par la galerie dite Gerhardsstollen, l'entrepreneur reçoit par fuder 3 sbg. 8 pf. ou frs. 0,44, pour une distance de 1200 lachter.

Quand les charriots sortent de la Johannisstollen par laquelle ils sont amenés à main d'homme, ils n'ont plus à parcourir au jour qu'une longueur de 870 lachter, et l'entrepreneur reçoit par fuder 3 sbg. 1 pf. ou frs. 0,37. Un cheval traîne de 10 à 12 chariots contenant 10 quintaux chacun.

Le chariot vide pèse 3 quintaux (154,k 50); plein il pèse 13 quintaux (669,k 50). Ainsi la charge du cheval allant au magasin est de 6695 à 8034 ko et quand il en revient à vide, elle est de 1545 à 1849 ko.

Observations.

Dans la couche dite Heinrichflœtz, on compte six fuder par lachter carré, et dans la couche dite Beustflœtz on en compte 6 ½; sa puissance est plus forte que celle de la première, mais elle est divisée en deux parties par un lit de pierres.

On compte environ un pied cube de bois par fuder; le pied cube de bois vaut 3 sbg. 6 pf.

En 1832, on a extrait 27833 fuder de 30 quintaux.

L'extraction journalière est environ de 100 fuder.

Dans la figure 1, on remarque dans les parties complètement exploitées, des petits barrages à l'entrée des tailles ; ce sont des digues qui sont formées de deux petits murs et d'un lit de sable ; elles servent à intercepter le passage de l'air. En effet, au bout d'un temps plus ou moins long, une forte odeur d'acide sulfureux s'échappe des remblais; le feu se met dans le menu charbon qu'on rejette en grande quantité dans les estappes, et il faut l'étouffer et l'arrêter autant que possible, pour qu'il ne se mette pas dans les parties de la couche encore inexploitées; c'est là le but qu'on veut atteindre au moyen de ces digues.

Quand on est trop pressé par le feu, on fait d'abord une digue provisoire en planches revêtues d'argile, devant lesquelles on établit une digue ordinaire.

On remarque que le feu ne prend jamais dans les parties bien aérées.

EXPLOITATION D'UNE COUCHE TRÈS-INCLINÉE (40 A 45°) A DUDWEILER.

La galerie Caroline (Carolinen-Stollen) par laquelle on extrait la houille, traverse jusqu'à vingt-sept couches, presque toutes assez fortes pour être exploitées avec avantage. On les distingue par des numéros d'ordre.

La dixième, dont nous avons observé le travail avec attention, est surtout remarquable par sa puissance, le nombre des bancs dont elle est formée et par les difficultés que présentait son exploitation, difficultés que l'excellente méthode de travail qui y est introduite a toutes surmontées.

On commence par établir une communication en veine, entre la bacnure et la galerie ou le puits d'airage. Cela fait, on mène une galerie de transport par chambrai, et parallèlement à celle-ci, en laissant

le long de la voie de transport un massif de 4 à 5 lachter, on pratique une taille avec laquelle on se met de temps en temps en communication par chambrai, pour donner l'air au maître niveau. On n'enlève le massif de 4 lachter environ qui se trouve aux parois, que quand on se décide à abandonner l'exploitation de ce côté, et alors le massif est exploité à reculons. Nous n'avons pas vu dans ces galeries de transport, de disposition particulière pour l'airage; d'ailleurs on ne les mène jamais fort loin sans les faire accompagner de tailles qui leur sont parallèles. Si l'on sent le défaut d'air, il est facile d'y porter remède en perçant le massif réservé, par un chambrai jusqu'à la taille contigue. On pourrait d'ailleurs en creusant cette galerie disposer, sur un des côtés, un conduit en bois pour la circulation de l'air.

A 30 ou 36 lachter plus haut, dans le plan de la couche, on établit une galerie de niveau menée de la même manière que la précédente, si ce n'est qu'on lui donne l'air par une petite taille parallèle et menée en dessous. Pour établir la communication entre les deux galeries, on a des vallées par lesquelles on jette les charbons (Rollloch) et des plans inclinés à double voie (Bremsschacht); bien que l'inclinaison soit très-forte (40 degrés), ils sont menés perpendiculairement au niveau, sans jamais prendre de direction diagonale. On préfère les plans inclinés aux Rolllœcher. On laisse autour d'eux un massif également de 4 lachter; le long de ce massif et parallèlement au Bremsschacht on a une galerie avec des échelles couchées, pour le passage des ouvriers d'un étage à l'autre.

Quand le champ d'exploitation a été ainsi préparé, on pousse des tailles horizontales de 1 ½ à 2 lachter de front; la première par en bas, longe le massif réservé du maître niveau. On laisse entre celle-ci et la deuxième en remontant, un pilier de deux lachter ; ce pilier est quelquefois plus considérable, mais alors, quand on l'enlève par le travail à reculons, l'exploitation présente du danger.

On établit ainsi une troisième, quatrième taille, etc. sur les deux côtés du Bremsschacht ou du Rollloch. Ces tailles sont poussées à une longueur assez variable de 30 à 50 lachter. On n'enlève pour chaque taille, que les deux bancs N°s 1 et 2 (*Voyez Pl.* I, *fig.* 2 et 4) de la couche ; le 3e et le 4e servent de toit, et ne sont enlevés que dans le travail à reculons. Dans les tailles, le chemin occupe toujours le haut, de manière à servir de voie de transport dans l'ouvrage à reculons (Rueckbau).

Quand les tailles sont avancées au point convenable, on procède à l'ouvrage à reculons; pour cela, on perce sur une largeur d'un et ½ lachter à deux lachter, le pilier ou massif réservé. On n'emporte également que

les N°s 1 et 2; il faut alors soutenir soigneusement avec des étançons les bancs N°s 3 et 4, qui occupent alors toute la largeur du massif réservé et des deux tailles qui l'entouraient. On emploie pour cela du bois de chêne fendu, placé en lignes, à $\frac{1}{2}$ lachter à peu près de distance l'une de l'autre. Dans les lignes les étançons sont à 4 pieds d'intervalle. Quand on s'est avancé avec le Rueckbau, à peu près de deux lachter, on enlève alors un rang d'étançons, en commençant par en bas, pour que les houilles des bancs N°s 3 et 4, en se détachant du toit, ne roulent pas sur les ouvriers, ce qui arriverait, si l'on commençait par en haut. On avance encore une hève de plus (la hève est de $\frac{1}{2}$ lachter) et on enlève un deuxième rang d'étançons, et ainsi de suite. On commence toujours par enlever la partie des bancs N°s 3 et 4, qui se trouvait au bas de la taille inférieure, ce qui demande quelque travail pour que rien ne reste sur le remblai; le reste des bancs vient d'ordinaire fort aisément.

Le travail de l'ouvrier à la taille ne diffère pas essentiellement du travail des ouvrages en platteure. Il emploie les mêmes outils et quand le toit est bon et solide, il pratique également des mines dans la houille.

Il arrive quelquefois que lorsqu'on a laissé un long massif réservé, on le divise en deux par une montée, et à partir delà, on le travaille à reculons à droite et à gauche.

Quand les couches ne sont pas très-distantes les unes des autres, on les recoupe par des bacnures, percés à des niveaux assez rapprochés, pour que les produits des deux tailles de ces différentes couches, puissent être aisément amenés avec des chariots, aux plans inclinés établis dans la couche principale.

On n'enlève les massifs réservés au-dessus du maître niveau et autour des plans inclinés, que quand on abandonne entièrement l'exploitation de ce côté.

Observations.

Quand on travaille des couches de moindre puissance, la largeur du massif réservé devient plus considérable et atteint 4, 5, et même jusqu'à 10 lachter. Mais pour une aussi forte largeur, il faut naturellement que le toit présente beaucoup de solidité.

Distribution du travail et mode de paiement des ouvriers.

Il y a pour chaque taille six hauer (ouvriers à la taille); ils reçoivent par fuder une somme qui varie de 25 sbg. à 1 thlr. 5 sbg., d'après la

difficulté plus ou moins grande de l'exploitation. Ils doivent fournir de 15 à 20 quintaux, soit de 772 k. à 1030 k. de houille dans le travail des tailles, et 5 quintaux ou 257 k. de plus, dans le travail à reculons.

Ils doivent remblayer, poser le boisage, extraire la houille et payer la poudre, les hercheurs, les réparations d'outils, de chariots, en un mot tous les frais d'une taille, excepté l'achat des matières premières. Pour cela on fait chaque mois le compte des frais de forge, etc., et on les porte en rabais sur les salaires du mois suivant; ce rabais est quelquefois de 6 à 9 pf. par poste de huit heures, pour chaque hauer.

Les ouvriers sont payés au mois, mais on leur passe chaque quinzaine un soulagement qui va souvent à la moitié de ce qui leur est dû.

Les hercheurs, qui sont divisés en trois classes et payés comme à la Gerhardsgrube, doivent mener un certain nombre de chariots pendant leur poste de huit heures. Ce nombre est établi de la manière suivante : on leur accorde dix minutes pour charger le chariot, deux minutes pour le vider et une minute pour parcourir vingt-cinq lachter; s'il manque un seul charriot au nombre ainsi prescrit, on leur rabat un quart de journée.

Il n'y a que les ouvriers de la première classe, qui traînent des chariots et il y a un hercheur par chariot; les autres ne mènent que des brouettes.

L'exploitation de la couche N° 10, à Sulzbach, est différente de celle de la même couche à Dudweiler, à cause de sa plus grande puissance, de la plus forte épaisseur du banc de schiste qui la sépare en deux parties principales, que nous avons désignées par les lettres A et B dans la figure 3 de la pl. I. A et B sont exploités comme deux couches distinctes et d'après la méthode ordinaire; seulement les tailles dans B ne sont que d'un lachter de largeur, tandis que dans A elles ont un lachter et $\frac{1}{2}$. Dans le Rueckbau, B a toujours un lachter d'avance sur l'autre, pour que les ouvriers de B ne soient pas exposés, quand le toit de A fait sa chûte.

Airage.

L'airage des deux houillères dont nous venons de parler se conduit de la manière suivante : on ménage au bas de la taille en A, un espace prismatique au moyen d'étançons s'appuyant d'un côté sur la houille, et de l'autre sur le mur de la couche (*Voyez fig.* 3). On met ensuite transversalement, soit des étançons couchés, soit même des pierres plattes, et par-dessus le remblai ordinaire; cette disposition est très-

bonne pour des tailles qui ne doivent pas être de longue durée, en supposant que l'ouvrage soit exécuté avec soin.

L'air au front de taille, vient par A et sort par G ; il passe d'une taille à l'autre, par des chambrais percés à travers les massifs réservés.

OBSERVATIONS.

Dans les mines que nous avons visitées, on avait autrefois la coutume de retirer les étançons dans l'ouvrage à reculons; mais cette opération toujours dangereuse, paraît être tout-à-fait abandonnée aujourd'hui.

—

Dans les trois mines que nous avons parcourues, on compte à peu près un étançon par fuder, ce qui correspond environ à un pied cube.

Le pied cube de bois de chêne, qui est le seul employé pour l'étançonnage, coûte à Dudweiler de 4 à 5 sbg. d'achat et de 6 à 8 pf. de transport.

Explication de quelques mots techniques employés dans la notice précédente.

Bacnure. Galerie à travers bancs.

Bremsschacht. Plan automoteur.

Chambrai. Voie simple et étroite coupée en veine sans remblayer.

Montée. Galerie suivant la pente en montant.

Vallée. Galerie suivant la pente en descendant.

Estapes. Remblais.

Rolloch. Voie suivant la pente par laquelle on verse le charbon quand la pente est très-forte.

Explication des planches.

Planche I.

Fig. I. *a a.* Petits murs d'une brique d'épaisseur.
b. Lit de sable de seize pouces d'épaisseur.
m. Massif.
g. Galerie de transport.

Fig. 2. Couche n° 10 à Dudweiler.

Fig. 3. Coupe d'une taille préparatoire dans l'exploitation d'une couche fortement inclinée, à Dudweiler.

G. Galerie de roulage.
A. Voie d'airage.
MM. Massif.
r. Remblai.

Fig. 4. Exploitation à reculons (Rueckbau), à Dudweiler.
Fig. 5. Couche n° 10, à Sulzbach.

Planche II.

A. Exploitation d'une couche peu inclinée, 0° à 10°.
B. Id. d'une couche plus inclinée, 15° à 22°.
C. Id. d'une couche très-inclinée, 40° à 60°.
D. Voies principales de roulage.
t. Tailles préparatoires menées en avant.
m. Massifs qu'on enlève par le travail à reculons (Rueckbau).
v. Galerie suivant la pente établissant communication entre les grandes voies de roulage inférieure et supérieure.
S. Bremsschacht, plan automoteur.
X. Maîtresse voie d'airage.
Z. Champ d'exploitation circonscrit par les voies de roulage et les Bremsschacht.
W. Point où la galerie à travers banc vient rencontrer le maître niveau.
U. Massifs réservés le long des voies principales de transport et des Bremsschacht ; quand on veut abandonner les travaux, on les enlève par Rueckbau.

IV. *Révision de la famille des* Cicindélides (*Cicindelidæ*) *de l'ordre des Coléoptères, accompagnée de la création de quelques genres nouveaux.*

PAR

M. Th. LACORDAIRE, professeur à l'université de Liége, etc.

La famille, qui fait l'objet de cette notice est trop connue des entomologistes pour qu'il soit nécessaire d'exposer en détail les caractères qui la séparent de tous les autres groupes de Coléoptères. Il suffira de rappeler ici qu'elle fait partie, conjointement avec les Carabiques, des Carnassiers terrestres de Latreille ou *Geodephaga* de M. Mac Leay, dont les caractères sont d'avoir « des machoires grèles, allongées dont le lobe interne est terminé par une pointe cornée et aiguë, tandis que l'externe est biarticulé et palpiforme; toutes les pattes propres à la course; les trochanters des cuisses postérieures saillants au côté interne; cinq articles à tous les tarses; enfin des antennes filiformes composées de onze articles. »

Ceux que les auteurs s'accordent à lui assigner pour la distinguer des Carabiques, sont : « des machoires terminées par un onglet articulé, mobile; la languette dépourvue de paraglosses, très-courte et ne dépassant pas le bord antérieur de l'échancrure du menton; les palpes labiaux quadriarticulés, leur support étant allongé et libre; des mandibules allongées, courbées, très-aiguës et fortement dentées au côté interne; des yeux grands et saillants; enfin des pattes longues, grèles, ayant constamment les jambes antérieures dépourvues d'échancrure.

De tous ces caractères, la brièveté de la languette et le nombre insolite des articles des palpes labiaux sont les seuls qui soient constants. Tous les autres présentent des exceptions ou se retrouvent chez un plus ou moins grand nombre d'espèces de la famille des Carabiques. Ainsi, l'onglet articulé qui termine le lobe interne des machoires manque complètement chez les *Psilocera*, *Procephalus*, *Ctenostoma* et dans un nouveau genre auquel j'ai donné le nom de *Myrmecilla*, tandis qu'on le retrouve dans les Carabiques du genre *Trigonodactyla*, ainsi que l'a fait connaître M. Brullé (1), d'après une

(1) *Hist. nat. des Insect.*, IV, p. 24.

observation de M. Audouin. Un groupe nombreux de cette dernière famille, les Simplicipèdes de M. Dejean, sont dépourvus d'échancrure aux jambes antérieures. La grandeur des yeux n'est pas plus constante que la présence de l'onglet articulé des machoires. Les *Manticora*, *Amblycheila*, *Omus*, *Oxycheila* et surtout les *Centrocheila* ont ces organes aussi petits qu'une foule de Carabiques. Quant aux mandibules, il suffira de rappeler que certaines *Anthia* sont au moins aussi bien pourvues sous ce rapport que pas une espèce de la famille actuelle.

Malgré ces rapports nombreux et incontestables avec les Carabiques, les Cicindélides ont un *facies* si particulier, des habitudes tellement caractérisées, surtout pour ce qui concerne la rapidité de leur course et la facilité avec laquelle celles qui sont ailées prennent leur vol, qu'à partir de Linné inclusivement, les entomologistes n'ont jamais hésité à en faire un groupe à part. Tous également, à bien peu d'exceptions près, se sont accordés à donner à ce groupe une valeur égale à celui des Carabiques. M. le comte Dejean est même le seul parmi les auteurs modernes, qui se soit écarté de l'opinion générale, en réunissant les deux groupes en un seul et en ne faisant de celui-ci qu'une simple division de l'autre. Il est douteux que cette façon de voir rallie jamais beaucoup de partisans. Sans doute les caractères qui distinguent les deux familles ne sont pas très-saillants; mais dans l'état actuel de la science, ils me paraissent très-suffisants pour motiver leur séparation, étant appuyés, comme ils le sont, par des différences notables dans le *facies* général, les habitudes et même les larves, qui présentent entre elles des différences de même valeur que celles qui existent entre les insectes parfaits, autant du moins qu'il est permis d'en juger d'après le petit nombre de celles qu'on connaît en ce moment.

Il en a été de cette famille comme de toutes celles de la classe des insectes. Composée du seul genre *Cicindela* comprenant 9 espèces (1), dans la 12e édition du *Systema naturæ*, de trois genres (*Manticora*, *Cicindela* et *Collyris*) et 69 espèces, dans le *Systema Eleutheratorum* de Fabricius, elle s'est enrichie successivement au point d'être presque sextuplée dans les ouvrages entomologiques le plus récents. M. Dejean dans la 3e édition du *Catalogue* de sa collection mentionne 285 espèces réparties dans 14 genres; le *Systema Insectorum* de M. Gistl bien plus riche encore comprend 384 espèces et 15 genres. Depuis la publication de ces deux ouvrages, un grand nombre d'espèces ont été décrites dans

(1) Déduction faite de celles que Linné y avait placées à tort.

divers recueils et il en existe beaucoup d'autres encore inédites dans les collections. Le nombre comparativement peu élevé des genres est probablement ce qui a porté la plupart des auteurs, notamment Latreille, MM. Mac Leay, Dejean et Gistl à ne pas diviser la famille en groupes secondaires ou tribus. MM. Brullé (1), de Castelnau (2) et Hope (3) sont jusqu'ici le seuls qui aient tenté de le faire, et comme j'ai apporté d'assez notables modifications aux arrangements qu'ils ont proposés, il ne sera pas inutile de jeter ici un coup-d'œil sur leurs travaux, d'autant plus que cet examen me fournira l'occasion d'exposer en même temps mes propres vues.

M. Brullé partage la famille en trois tribus : les *Manticoriens*, les *Cicindéliens* et les *Collyriens*.

La première se compose des genres : *Manticora, Omus*, *Platychile* et *Megacephala*.

Ce dernier genre me paraît de trop ici; il manque d'un des principaux caractère que M. Brullé assigne à la tribu et qui consiste dans la petitesse des yeux : ces organes sont au contraire fort développés chez ces insectes et légèrement oblongs, tandis que dans les trois autres genres ils sont arrondis et globuleux. La prédominence de leurs palpes labiaux sur les maxillaires, sous le rapport de la longueur, est un autre caractère encore plus important, qui vient à l'appui de la nécessité d'en former un groupe particulier, à quoi il faut ajouter leur *facies* qui est tout différent, les couleurs métalliques brillantes dont ils sont ornés, la présence d'ailes sous leurs élytres, à l'exception de deux seules espèces (*Megacephala senegalensis* et *quadriguttata*.) Il n'y a que quelques rapports dans le développement et la forme de la tête qui puissent venir à l'appui du rapprochement fait par M. Brullé, mais ce caractère isolé ne peut l'emporter sur ceux qui précèdent.

La tribu des Cicindéliens se compose des six genres : *Cicindela*, *Oxycheila*, *Iresia*, *Dromica*, *Euprosopus* et *Therates*.

Il me paraît impossible d'assigner aucun caractère général à cette tribu ainsi composée; aussi tous ceux que M. Brullé a mis en avant comme les plus saillants souffrent-ils des exceptions plus ou moins nombreuses. Ainsi, pour ce qui concerne les yeux qu'il dit suffire pour la distinguer au premier coup-d'œil, ces organes chez les *Oxycheila* ont les plus grands rapports avec ceux des *Manticora* et ne ressemblent nullement à ceux des *Cicindela*. Chez les *Iresia* les palpes labiaux sont

(1) *Hist. nat. des Insectes* IV. (2) *Études entom.* p. 33 et *Hist. nat. des Col.* I. p. 9. (3) *The Coleopt. Manual.* II, passim.

plus grands que les maxillaires comme chez les *Megacephala.* J'ajouterai même que ce caractère se retrouve chez les *Oxycheila*, quoique M. Dejean dise comme M. Brullé que ces organes sont égaux ; je les trouve tels que je viens de l'indiquer dans toutes les espèces que j'ai examinées. La différence est peu de chose il est vrai ; on voit que c'est un caractère qui est sur le point de disparaître, mais il n'en existe pas moins : aussi suis-je d'avis que les deux genres que je viens de nommer doivent faire partie du groupe dont les *Megacephala* sont le type. La grandeur du labre (1) que M. Brullé assigne encore à la tribu actuelle comme un de ses principaux caractères, souffre tant d'exceptions, parmi les *Cicindela*, qu'il serait peut-être plus vrai de dire que dans la majorité des espèces, il laisse en grande partie les mandibules à découvert. Quant au *Therates*, M. Brullé dit qu'on peut les placer à volonté dans cette tribu ou dans la suivante. Pour moi, la question ne peut être un instant douteuse. Il suffit de comparer les yeux de ces insectes, leur front fortement excavé, leur labre excessivement grand, leurs palpes courts, robustes et redressés, avec les mêmes organes chez les *Collyris* et les *Tricondyla*, pour voir qu'il est impossible de les séparer de ces deux genres, qui sont originaires des mêmes contrées. En résumé, je ne vois que trois genres, les *Cicindela*, *Dromica* et *Euprosopus* qui puissent rester dans cette tribu.

La dernière, celle des Collyriens, comprend les genres : *Collyris*, *Tricondyla*, *Psilocera*, *Procephalus* et *Ctenostoma.*

M. Brullé a commis au sujet des *Procephalus* une erreur, qui est cause sans doute qu'il n'a pas divisé cette tribu en deux. Il donne à ces insectes un onglet articulé aux machoires, tandis qu'ils en sont complètement dépourvus comme les *Psilocera* et les *Ctenostoma.* Ce caractère réuni aux palpes très-longs, hérissés et pendants, qui sont propres à ces trois genres, montre qu'ils constituent un petit groupe très-naturel, qui n'a de commun avec les *Collyris* et les *Tricondyla* que des rapports généraux dans la forme du corps. Ces deux derniers genres ont des palpes semblables à ceux des *Therates* et leurs machoires sont armées de l'onglet articulé propre à la famille. Cette tribu me paraît donc devoir de toute nécessité en former deux.

Le travail de M. de Castelnau ressemble à certains égards à celui que je viens d'examiner : sur d'autres points il offre des différences

(1) C'est sans doute par suite d'un *lapsus calami*, que M. Brullé avance (p. 46), que les dents dont le labre est si souvent muni sont plus prononcées chez les mâles que chez les femelles. Tous les entomologistes savent que c'est le contraire qui a lieu.

assez grandes. De même que M. Brullé, cet entomologiste partage la famille en trois tribus qu'il nomme : *Manticorites*, *Mégacéphalites* et *Ctenostomites*.

Parmi les caractères assignés à la première, qui ne comprend que les genres *Manticora* et *Platychile* se trouve le suivant : *tarses simples dans les deux sexes*; ce qui n'est vrai que pour le premier de ces genres : les mâles des *Platychiles* ont les trois premiers articles de leurs tarses antérieurs dilatés, ainsi que la fait connaître dès l'origine M. MacLeay (1) puis ensuite M. Klug (2), longtemps avant que ne parût le travail de M. De Castelnau.

La tribu des Megacéphalites correspond à celles des Cicindéliens de M. Brullé, avec cette différence qu'elle comprend les genres *Omus* et *Megacephala*, et que le genre *Therates* en est retranché pour être reporté parmi les Ctenostomites (Collyriens de M. Brullé). Les observations que j'ai faites plus haut me dispensent d'entrer dans aucun détail sur cet arrangement.

Le travail de M. Hope est remarquable par un assez grand nombre de genres nouveaux, mais très-superficiellement caractérisés pour la plupart par cet auteur qui, de plus, suivant une habitude qu'il à contractée depuis longtemps, s'est abstenu de donner les caractères des groupes qu'il admet dans la famille, de sorte qu'on est réduit à deviner ceux qu'il leur assigne dans sa pensée. Ces groupes sont au nombre de quatre comprenant les genres suivans :

Manticoridæ. Manticora.

Megacephalidæ. Megacephala, Tetracha, Aniara.

Cicindelidæ. Corpus apterum. Dromica, Apteroessa, Eurymorpha.

Corpus alatum. Oxycheila, Iresia, Euprosopus, Odontocheila, Plochiocera, Cicindela, Abroscelis, Calochroa, Distipsidera, Therates, Cylindera, Oxygonia, Heptadonta.

Collyridæ. Collyris, Tricondyla, Procephalus, Ctenostoma, Psilocera.

La création de la tribu des Megacéphalides est le trait le plus saillant de cette classification et me paraît être une heureuse innovation. Elle est pure en outre de toute alliage, les deux genres nouveaux qu'elle renferme ayant été créés aux dépens de l'ancien genre *Megacephala*. Il n'en est pas de même de la tribu des Cicindélides : outre qu'elle renferme les mêmes éléments étrangers qu'y avaient déjà introduits MM. Brullé et de Castelnau, la plupart des genres qui composent sa se-

(1) *Annal, Jav.* p. 9.
(2) *Jahrb. der Insektenk.* p. 3.

conde division sont placés dans un ordre tel, qu'on dirait que l'auteur a eu pour but de briser et de confondre tous les rapports. Il suffit pour s'en convaincre de jeter un coup d'œil sur les cinq derniers genres. Celui des *Calochroa*, fondé sur les *Cicindela chinensis*, *aurulenta*, *princeps*, etc., est suivi du genre *Distipsidera*, établi par M. Westwood sur une espèce très-éloignée des *Cicindela* des auteurs. Celui-ci est suivi à son tour des *Therates* auxquels succède le genre *Cylindera* comprenant les *Cicindela germanica*, *scalaris*, etc. ; après quoi vient le genre *Oxygonia*, créé par M. de Mannerheim sur une espèce très-voisine des *Iresia* et ayant le *facies* des *Euprosopus*; puis pour couronner le tout arrivent les *Heptadonta*, c'est-à-dire les *Cicindela analis*, *quadripunctata* et autres espèces de la troisième division de M. Dejean. La critique n'a réellement rien à voir avec un pareil arrangement.

La dernière tribu, celle des Collyrides correspond exactement à celle des Collyriens de M. Brullé et n'exige aucune remarque nouvelle.

Une étude attentive m'a convaincu, qu'au lieu d'établir dans la famille seulement trois ou quatre divisions, il en faut cinq dont l'une devrait même peut-être en former deux. Avant de les exposer, je dois dire un mot de l'usage que j'ai fait d'un caractère auquel on n'a pas accordé jusqu'ici l'importance qu'il me paraît mériter. Je veux parler de la forme renflée et comme vésiculeuse qu'affectent les palpes labiaux, surtout leur troisième article, dans un assez grand nombre d'espèces. On s'est contenté de la signaler quand on l'a rencontrée, en en faisant à peine un caractère générique; mais dans ces derniers temps on a reçu des espèces ayant le *facies* des *Cicindela*, et que ce renflement des palpes sert à distinguer de ces dernières à côté desquelles elles semblent constituer une série particulière. Pour apprécier exactement la valeur d'une pareille modification des palpes, il faudrait connaître avec certitude les fonctions de ces derniers, c'est-à-dire si indépendamment du tact, ils ne sont pas le siége de quelque sens, comme on l'a prétendu; quoiqu'il en puisse être à cet égard, j'ai peine à croire que cette structure singulière n'influe pas d'une manière ou d'une autre sur le rôle que remplissent ces organes. En effet presque toutes les fois que ce renflement a lieu, ils sont blanchâtres, translucides et leurs parois paraissent très-amincies. J'ai donc attaché une grande valeur à ce caractère et je m'en suis servi pour établir une division primaire dans la tribu des Cicindélides.

M. Brullé en a découvert, chez certaines *Cicindela*, un autre qu'il n'a employé que pour établir une simple section dans le genre en question, mais qui me paraît aussi avoir plus de valeur qu'il ne lui en assigne. Ce sont ces stries longitudinales qui existent à la surface supé-

rieure des tarses, non seulement aux trois premiers articles antérieurs chez les mâles, comme semble le dire M. Brullé, mais à toutes les pattes et dans les deux sexes. Isolé, ce caractère serait presque insignifiant. mais comme il est presque toujours uni à une forme très allongée et très grêle des tarses, à un labre avancé et cachant en grande partie les mandibules, à un corps étroit et svelte, et enfin que, sauf de rares exceptions, toutes les espèces chez qui il existe, vivent sur les feuilles, il me semble qu'il mérite d'être pris en considération dans la création des genres, surtout dans un groupe aussi nombreux que celui des *Cicindela*. Une foule de genres de Carabiques et d'autres familles reposent sur des caractères moins importants que celui-ci.

Le tableau suivant présente l'énumération des tribus et des genres que j'admets dans la famille.

Tribu I. Manticorides. *Manticoridæ.*

Tête grosse. Palpes égaux en longueur; le 1[er] article des labiaux ne dépassant pas ou que très-légèrement l'échancrure du menton : celle-ci munie d'une forte dent. Yeux petits, arrondis. Les trois premiers articles des tarses antérieurs tantôt simples dans les deux sexes, tantôt dilatés chez les mâles. Jamais d'ailes sous les élytres.

I. Tarses antérieurs simples dans les deux sexes.	1 *Manticora.*
II. Les trois premiers articles des tarses antérieurs dilatés chez les mâles.	
A. Angles du prothorax saillants, surtout les postérieurs.	2 *Platychile.*
B. Ces mêmes angles nuls.	
Labre dentelé en avant.	3 *Amblycheila.*
— simplement sinué en avant.	4 *Omus.*

Tribu II. Mégacéphalides. *Megacephalidæ.*

Tête grosse ou médiocre. Palpes labiaux plus longs que les maxillaires ; leur 1[er] article dépassant toujours fortement l'échancrure du menton ; celle-ci munie d'une dent plus ou moins forte. Yeux petits chez les uns, grands chez les autres. Les trois premiers articles des tarses antérieurs dilatés chez les mâles. Des ailes sous les élytres chez presque tous.

I. Yeux petits, arrondis, plus ou moins saillants.	
Labre en triangle allongé, régulier, cachant entièrement les mandibules.	1 *Oxycheila.*
— triangulaire, rétréci subitement et prolongé en une forte pointe.	2 *Centrocheila.*

II. Yeux grands, oblongs et saillants.
A. Dernier article des palpes labiaux plus court que le pénultième.
a. Corps court, élargi en arrière. 3 *Eurymorpha.*
aa. — allongé, subparallèle.
b. Labre court, coupé plus ou moins carrément en avant, laissant les mandibules à découvert.
Corps aptère; angles huméraux des élytres effacés. 4 *Megacephala.*
— presque toujours ailé; angles huméraux des élytres bien distincts. 5 *Tetracha.*
b b. Labre avancé, cachant en grande partie les mandibules. 6 *Aniara.*
B. Dernier article des palpes labiaux plus long que le pénultième. 7 *Iresia.*

Tribu III. CICINDÉLIDES. *Cicindelidæ.*

Tête médiocre. Palpes maxillaires un peu plus longs que les labiaux ou au moins aussi longs; le 1er article de ces derniers dépassant l'échancrure du menton (un seul genre excepté, *Oxygonia*); celle-ci munie d'une dent plus ou moins forte. Yeux grands, oblongs ou réniformes. Les trois premiers articles des tarses antérieurs dilatés chez les mâles. Corps le plus souvent ailé.

Division I. 3e *article des palpes labiaux non renflé.*

I. Tarses non sillonés en dessus.
Cuisses épineuses à leur extrémité. 1 *Oxygonia.*
— inermes. — — 2 *Cicindela.*
II. Tarses sillonés en dessus.
A. Labre court, transversal.
— arrondi en avant et muni de 7 dents. 3 *Euryoda.*
— coupé carrément — de 3 dents. 5 *Phyllodroma.*
B. Labre avancé, oval ou trigone, cachant en grande partie les mandibules.
Corps assez épais. Élytres courtes, subcylindriques. 4 *Cheilonycha,*
— peu épais, svelte : élytres parallèles déprimées. 6 *Odontocheila.*

Division II. 3e *article des palpes labiaux renflé.*

I. 2e article des palpes maxillaires renflé, reniforme. 7 *Physodeutera.*
II. — — — cylindrique.

A. Les 3 premiers articles des tarses antérieurs des mâles revêtus en dessous de poils en massue. 9 *Megalomma.*
B. Les mêmes articles revêtus de poils ordinaires.
a. Dent du menton à peine distincte. 8 *Distipsidera.*
a'a. — — bien distincte.
b. Corps aptère.
Labre court, transversal. 10 *Apteroessa.*
— avancé. 11 *Dromica.*
bb. Corps ailé. 12 *Euprosopus.*

Tribu IV. COLLYRIDES. *Collyridæ.*

Labre très-grand, vouté, cachant entièrement les mandibules. Palpes égaux, courts, robustes et redressés : le 1er article des labiaux dépassant fortement l'échancrure du menton; celle-ci dépourvue de dent. Yeux très-grands, très-saillants, pourvus d'une orbite supérieure très-prononcée. Tarses de forme variable ; le 4e article des antérieurs au moins bilobé. Corps étroit, allongé.

I. Lobe externe des machoires spiniforme. 1 *Therates.*
II. — — — palpiforme, biarticulé.
4e article de tous les tarses faiblement prolongé en dedans. 2 *Tricondyla.*
— — fortement — 3 *Collyris.*

Tribu V. CTÉNOSTOMIDES. *Ctenostomidæ.*

Lobe interne des machoires dépourvu d'onglet articulé. Palpes très-longs, hérissés, pendants ; le 1er article des labiaux dépassant fortement l'échancrure du menton ; celle-ci inerme ou munie d'une très-petite dent. Les trois premiers articles des tarses antérieurs dilatés chez les mâles. Corps allongé, étroit.

I. Point de dent au milieu de l'échancrure du menton. 1 *Psilocera.*
II. Une petite dent — — —
A. Palpes égaux ou presque égaux en longueur
Élytres cylindriques parallèles. 2 *Procephalus.*
— en ovoïde allongé, renflées à leur extrémité. 3 *Ctenostoma.*
B. Palpes labiaux beaucoup plus longs que les maxillaires. 4 *Myrmecilla.*

PREMIÈRE TRIBU.

Mégacephalides *Megacephalidæ.*

I. Manticora.

Fab. Syst. El. I. p. 167.

Carabus. *Degeer. Mém.* VII, p. 623. — Cicindela *Thunb. Nov. Sp. Ins.* p. 25.

Ce genre bien connu ne peut donner lieu à aucune observation. Tous les entomologistes savent qu'il est propre à l'Afrique australe, et s'accordent avec raison à le placer en tête de la famille. Pendant longtemps on n'en a connu qu'une seule espèce, la *M. Maxillosa* de Fabricius (*Carabus tuberculatus*, Degeer; *Cicindela gigantea*, Thunberg ; *Manticora tuberculata*, Brullé, Gistl. etc.). Mais dans ces dernières années, M. Waterhouse (Jardine and Selby *Magaz. of nat. hist.* septembre 1837) en a décrit sous le nom de *latipennis*, une seconde qui paraît réellement distincte. M. Hope en a donné une figure dans son *Col. Man.* II, pl. 2. D'après ces deux auteurs, elle diffère de la précédente par sa taille plus grande, sa tête et ses élytres proportionnellement plus larges; ces dernières sont plus courtes et plus arrondies : leur bord latéral est plus fortement caréné et les tubercules dont elles sont couvertes en dessus sont plus petits. — Elle a été trouvée à Kurrechan dans l'Afrique australe par le docteur Smith. La collection de la société zoologique de Londres paraît être la seule en Europe où elle existe.

On a souvent fait mention de la ressemblance, qui existe au premier aspect, entre ces insectes et les grosses araignées du genre *Mygale* ; une analogie plns réelle est celle qu'ils ont avec les *Anthia*, ainsi que l'ont fait observer Latreille et MM. Mac Leay et Kirby.

II. Platychile.

Mac Leay. Annul. Jav. p. 9.

Platycheila, *Gistl. Syst. Ins.* I. p. 3. — Manticora, *Fab. Syst. El.* I. p. 167.

Si Latreille avait pu voir ce genre, il n'aurait pas dit, comme il l'a fait (*Règne an.* 2e éd. IV, p. 360), qu'il ne lui paraissait guères différer des *Manticora* que par ses élytres qui ne sont pas soudées. Outre que les trois premiers articles des tarses antérieurs sont dilatés chez les

mâles, tandis qu'ils sont simples chez ceux des *Manticora*, le prothorax est tout autrement fait; la tête y est enfoncée presque jusqu'aux yeux et de forme presque carrée, etc. Il n'existe pas de genre mieux caractérisé. L'unique espèce du Cap qui le compose (*P. pallida*) est, comme on sait, très-rare dans les collections, mais du reste bien connue aujourd'hui, grâces aux descriptions de MM. Mac Leay, Dejean (*Species* V, p. 198) et à la bonne figure qu'en a donnée M. Klug (*Jahrb. der Insekt.* pl. 1 fig. 1), figure qui jusqu'ici est la seule qui existe.

III. Amblycheila.

Say. Trans. of the amer. phil. soc. of Philad. new. ser. IV, p. 409.

Manticora. *Say. Journ. of nat. sc. of Philad.* III. pars 1 p. 139. — Omus. *Casteln. Annal. Soc. entom. de France* I, p. 387. *Hist. nat. des Col.* I. p. 10.

Ce genre représente dans la partie nord-ouest de l'Amérique du nord, les *Manticora* de l'Afrique australe; mais sa forme générale est aussi allongée que celle de ce dernier genre est large et courte et l'on conçoit difficilement que Say qui l'a fait connaître le premier, l'ait d'abord confondu avec lui. Plus tard, il en forma avec raison un genre à part sous le nom indiqué plus haut. Pendant longtemps ce genre est resté inconnu en nature aux entomologistes d'Europe, qui, pour la plupart, le confondaient avec le genre *Omus* d'Eschscholtz, qui est très-différent. M. Reiche est le premier d'entre eux, qui l'ait décrit *ex visu* (*Annal. Soc. entom de France*, VIII. p. 560), d'après un individu femelle appartenant à M. Dupont, le seul probablement qui existe dans les collections d'Europe et que j'ai en ce moment sous les yeux. Les caractères génériques donnés par Say dans les *Transactions de la Société de Philadelphie*, sont peu satisfaisants et pourraient laisser quelque incertitude sur l'identité du genre auquel il s'applique avec celui que M. Reiche a publié. Mais quand on lit la description qu'il a donnée de l'espèce, sous le nom de *Manticora cylindriformis*, dans le *Journal des sciences naturelles de Philadelphie*, le doute n'est plus possible. M. Reiche a très-bien reconnu le genre, mais il a pensé que l'espèce, qu'il avait sous les yeux n'était pas la même que celle de Say, et il lui a en conséquence imposé un nom nouveau (*A. Piccolominii*). Quant à moi je ne doute pas plus de l'identité de l'espèce que de celle du genre et je lui restitue son nom primitif d'*A. cylindriformis*. Say n'a eu à sa disposition qu'un exemplaire mutilé et dont les couleurs étaient altérées, mais à part ce dernier point, sa description ne laisse rien à désirer.

N'ayant vu qu'un individu femelle, je n'ai pas la certitude complète que les trois premiers articles des tarses antérieurs des mâles soient dilatés, mais d'après l'analogie, je n'en doute pas. Cette femelle n'a que six segments abdominaux comme toutes celles de la famille.

IV. OMUS.

Eschscholtz. Zool. Atlas, fasc. I. p. 4.

La patrie de ce genre est la même que celle du précédent. L'espèce sur laquelle Eschscholtz l'a établi manque dans toutes les collections d'Europe, excepté dans la sienne, qui fait aujourd'hui partie du Museum d'histoire naturelle de Saint-Pétersbourg. Mais M. Reiche en a décrit deux autres parfaitement distinctes et qu'il a bien voulu me confier. Il me reste cependant quelques légers doutes sur la question de savoir, si ces deux espèces appartiennent réellement au genre d'Eschscholtz ; leurs caractères génériques s'accordent bien avec ceux qu'a exposés cet auteur, mais en les comparant avec la figure qu'il a donnée de son *Omus californicus*, je trouve que leur forme générale et par conséquent leur *facies* présente des différences assez notables. Une comparaison faite sur la nature pourra seule trancher cette question. En attendant j'adopte l'opinion de M. Reiche. Il ne peut aujourd'hui exister aucune incertitude sur la diversité de ce genre et des *Amblycheila* de Say. Les espèces qui le composent sont en ce moment au nombre de trois :

1 O. californicus. *Eschs.*, *Zool. atlas*, fasc. 1, p. 4, pl. 4, f. 1.
2 O. Dejeani. *Reiche*, *Annal. soc. entom. de France*, VII, p. 299, pl. 10, fig. 1.
3 O. Audouini. *Reiche*, *loc. cit.*, p. 300, pl. 10, fig. 2.

DEUXIÈME TRIBU.

MEGACÉPHALIDES. *Megacephalidæ.*

Ainsi que je l'ai dit plus haut, le genre *Megacephala* des auteurs ne peut être placé, ni parmi les Manticorides, comme la fait M. Brullé, ni parmi les Cicindélides, ainsi que l'a pensé M. De Castelnau. Il diffère des premières par ses palpes labiaux plus longs que les maxillaires et dont le 1er article dépasse fortement le bord antérieur de l'échancrure du menton, par ses yeux beaucoup plus développés, la présence d'ailes sous les élytres, enfin par des couleurs et un *facies* tout autres. Il s'éloigne des secondes par le premier des caractères qui précèdent,

sa tête un peu plus grosse, ses yeux moins saillants et sa forme générale. Je crois donc avec M. Hope qu'il est convenable d'en faire un groupe distinct dans la famille, intermédiaire entre les deux autres que je viens de nommer, et je fais entrer dans ce groupe les *Oxycheila* et les *Iresia* de M. Dejean, façon de voir qui a besoin d'être justifiée.

On a coutume de placer le premier de ces genres dans le voisinage des *Cicindela* avec lesquelles je ne lui trouve que des rapports éloignés. La forme générale du corps est d'abord très-différente et il n'existe même rien qui s'en rapproche dans le reste de la famille. Les palpes labiaux sont un peu plus longs que les maxillaires, comme je l'ai déjà fait observer, et ce caractère est essentiellement propre à la tribu actuelle. Cela seul suffirait pour montrer que ces insectes doivent en faire partie; mais il y en a un autre qui le prouve encore mieux et qui fait voir en même temps qu'ils doivent être placés en tête. Je veux parler de la forme des yeux, qui sont absolument conformés comme ceux des Manticorides, c'est-à-dire parfaitement arrondis et complètement dépourvus de cette orbite supérieure qu'on retrouve plus ou moins développée chez toutes les Cicindélides. Ce caractère est important précisément parce qu'il est exceptionel dans la famille, qui est remarquable par le grand développement de ces organes. La faible supériorité que chez ces insectes les palpes labiaux ont sur les maxillaires sous le rapport de la longueur, ne pourrait suffire à elle seule pour démontrer s'ils doivent être placés à la tête ou à la fin de la tribu, car on pourrait tout aussi bien voir là un caractère près de disparaître qu'un qui commence à se produire, mais réuni à la forme d'yeux dont je viens de parler, il achève de décider la question et montre que les *Oxycheila* font le passage des *Manticora* à la tribu actuelle. Je ne vois qu'une objection qu'on pourrait faire à la place que j'assigne à ces insectes. Elle serait empruntée à la forme de leur labre qui, je l'avoue, est étrangère aux *Megacephala* comme aux *Manticora*, mais isolée, peut elle l'emporter sur les deux caractères qui viennent d'être signalés, et d'ailleurs cette forme si commune parmi les Cicindélides ne souffre-t-elle pas dans cette tribu de nombreuses exceptions?

Quant aux *Iresia*, la longueur de leurs palpes labiaux me paraît un motif suffisant pour les placer à côté des *Megacephala*. Sans cela elles formeraient une exception unique parmi les Cicindélides et rendrait ce groupe peu naturel. La forme de leur labre paraîtrait devoir les rapprocher des *Oxycheila*, mais leur forme générale et d'autres caractères ne permettent pas de les éloigner du genre *Oxygonia* de

M. De Mannerheim par lequel je commence la tribu suivante. Je les place donc à la fin de celle-ci.

I. (5). Oxycheila.

Dejean. Species. I. p. 15.

Cicindela. *Fab. Syst. El.* I. p. 235.

Ce genre fondé par M. Dejean a été aussitôt adopté par tous les entomologistes. C'est en effet un des plus naturels de la famille. On en connaît aujourd'hui sept espèces toutes originaires des parties chaudes de l'Amérique du Sud.

1 O. tristis. *Dej. Species.* I. p. 16. Cicindela tristis. Fab. *Syst. El.* I. p. 235.
2 O. distigma. *Gory. Magaz. d'entom.* A. 1831. n° 17.
3 O. acutipennis. *Buquet. Magaz. d'entom.* A. 1835. n° 130.
4 O. labiata. *Brullé. Voy. de d'Orbigny. Entom.* p. 3.
5 O. femoralis. *Castelnau, Revue entom. de Silberm.* I. p. 128.
6 O. binotata. *Gray. Anim. Kingd. Insect.* I. p. 264. pl. 29. fig. 2.
7 O. bisignata. *Guérin, Dict. pittor. d'Hist. nat.* VI, p. 572. O. binotata. *Castèlnau, Revue entom. de Silberm.* I. p. 129.

II. (6). Centrocheila.

Cicindela. *Latr. in Humb. et Bompl. Rec. d'Obs. de Zool.* I. p. 228. — Oxycheila. *Dejean. Species.* V. p. 205.—Pseudoxycheila. *Guérin, Dict. pittor. d'Hist. nat.* VI. p. 573.

La *Cicindela bipustulata* de Latreille, placée par M. Dejean et tous les auteurs parmi les *Oxycheila*, me paraît présenter des caractères suffisants pour constituer un genre à part. M. Guérin dans l'ouvrage cité plus haut, a déjà créé pour elle une section particulière dans le genre *Oxycheila* fondée uniquement sur la moindre largeur des élytres à leur base comparativement à celle du prothorax. Mais ce caractère est insignifiant et il y en a de plus solides qui n'auraient pas dû échapper à cet auteur. Le nom peu euphonique de *Pseudoxycheila* qu'il avait donné à cette section, se trouvant par là équivaloir à un nom inédit, je me suis cru autorisé à le changer et à en créer un plus convenable. On reconnaîtra ce genre aux caractères suivants :

Tête notablement plus grosse que celle des *Oxycheila*, un peu renflée sur les cotés en avant. Labre très-grand, un peu voûté, subitement rétréci dans sa moitié antérieure, qui forme une épine très-forte, dentelée sur ses bords. Yeux beaucoup plus petits, très-peu saillants. Les

trois premiers articles des tarses antérieurs plus fortement dilatés, plus ciliés à leur côté interne qu'en dehors.

Je ne connais que l'espèce indiquée plus haut, qui puisse rentrer dans ce genre. J'en possède une variété un peu plus étroite, chez qui la tache orangée de chaque élytre est plus grande, plus pâle et plus antérieure. Je ne pense pas qu'elle puisse former une espèce distincte.

III. (7). Eurymorpha.

Hope, Coleopt. Man. II. p. 160.

Ce genre, que je n'ai pas vu en nature, a été fondé par M. Hope sur un insecte très-remarquable et très-différent de tous ceux de cette famille, mais qui cependant par sa forme générale a quelque analogie avec les *Oxycheila*. Les caractères qui suivent ont été rédigés d'après ceux exposés par cet auteur, ainsi que d'après la description et la figure qu'il a publiées de l'espèce.

Tête grosse, velue, rétrécie en avant des yeux, renflée en arrière, à peine un peu plus large que le thorax. Labre transversal, très-court, arrondi aux angles antérieurs et muni dans son milieu de trois petites dents. Mandibules plus longues que la tête, très-aigues, quadridentées intérieurement : la dent basilaire plus forte que les autres. Palpes maxillaires un peu plus courts que les labiaux; leur dernier article légèrement dilaté à son extrémité, plus court que le pénultième; le 1er article des labiaux dépassant fortement l'échancrure du menton; le 4e dilaté comme celui des maxillaires. Une forte dent au milieu de l'échancrure du menton. Antennes un peu plus longues que la moitié du corps; leur 3e article un peu plus long que les suivants. Yeux grands, réniformes, saillants. Prothorax transversal, parallèle sur les côtés, avec ses angles antérieurs un peu saillants; les postérieurs tronqués. Écusson triangulaire, placé entre les élytres. Celles-ci courtes, fortement élargies en arrière. Pattes longues; tarses de la longueur des jambes.

E. cyanipes : Viridis, subnitida, capite thoraceque albido-pilosis, elytris immaculatis, labro pedibusque cyaneis. Long. 7, Lat. 3 ½ lin.

La patrie de cette espèce est inconnue; M. Hope suppose qu'elle est originaire de Madagascar. L'exemplaire d'après lequel il a établi le genre, est une femelle et fait partie de la collection de la société zoologique de Londres.

IV. (8). Megacephala.

Latreille, Gener. Crust. et Ins., I. p. 175.

Cicindela. *Fab. Syst. El.* I. p. 232. — Aptema. *Serville, Encyc. méth.* X. p. 618.

MM. Lepelletier de Saint-Fargeau et Serville ont les premiers divisé le genre *Megacephala* de Latreille en deux sections : l'une qu'ils ont nommée *Aptema*, comprenant les espèces aptères, l'autre contenant les espèces ailées, à laquelle ils ont réservé le nom de *Megacephala*. Il y a là une transposition de nom qui n'aurait pas dû avoir lieu. En effet, Latreille ayant fondé le genre *Megacephala* sur la *M. Senegalensis* qui est aptère, ce nom aurait dû rester au groupe dont cette espèce est le type, et celui qui contient les espèces ailées devait en recevoir un nouveau. M. Hope (*Col. Man.* II. p. 7.), a érigé la première des sections établies par MM. Lepelletier de Saint-Fargeau et Serville en un genre propre auquel il a conservé avec raison le nom de *Megacephala* et, à l'imitation des deux entomologistes ci-dessus, il y comprend la *M. Euphratica* qui est ailée (Ménetriés *Catal. raison.* p. 93.) et la *M. quadrisignata* de M. Dejean qui est aptère comme la *Senegalensis*. Ainsi constitué, le genre n'est plus caractérisé par l'absence d'ailes sous les élytres, mais uniquement en ce que les espèces qui le composent n'auraient que trois dents à chacune de leurs mandibules tandis que celles du suivant en auraient quatre, caractère insignifiant et même faux, comme nous le verrons plus loin.

Je crois qu'il convient de ne conserver dans ce genre que la M. *Senegalensis* sur lequel il a été fondé primitivement, mais je ne trouve que les caractères suivants qui peuvent séparer cette espèce des autres *Megacephala* :

Corps plus épais, plus robuste. Tête plus grosse. Élytres cylindriques, nullement planes en dessus, ayant les angles huméraux complètement effacés et aussi larges que le prothorax à leur base. Pattes un peu plus fortes, proportionnellement plus courtes.

Ces différences peuvent-elles suffire pour une distinction générique?

V. (9). Tetracha.

Westwood in Hope Coleopt. Man. II. p. 7.

Cicindela. *Fab.* *Syst. El.* I. p. 233. — Megacephala. *Dej. Species.* I. p. 7.

M. Westwood, le créateur de ce genre, n'en a exposé nulle part les caractères, que je sache. Je ne le trouve mentionné que dans l'ou-

vrage ci-dessus de M. Hope où il est caractérisé par cette phrase unique : *Mandibules avec quatre dents apicales* (1); sur quoi je ferai observer qu'il y a des espèces, la *T. Carolina* par exemple, qui ont quatre dents sur la mandibule droite et trois sur la gauche, et qui sont ainsi des *Tetracha* d'un côté et des *Megacephala* de l'autre. Le nombre de ces organes est trop variable et par conséquent trop dépourvu d'importance pour pouvoir servir à la création d'un genre. Celui-ci ne se distingue du précédent que par ses formes moins robustes, sa tête généralement moins grosse et ses élytres, qui soit subparallèles, soit oblongues, sont toujours peu convexes, plus larges que le prothorax à leur base et ont leurs angles huméraux obtus, mais distincts. Toutes les espèces, à l'exception d'une seule, sont ailées. Leur labre présente quelques différences, étant dans certaines d'entre elles pourvu de trois dents qui chez d'autres disparaissent entièrement. On peut en dire autant des palpes; assez robustes dans la *T. quadrisignata* et quelques autres espèces, ils deviennent très-grèles chez quelques-unes, telles que la *testudinea*, mais comme entre ces deux formes on trouve tous les passages, on ne peut en tirer aucun parti.

On connaît aujourd'hui plus de 30 espèces de *Tetracha* qui, à l'exception de deux, sont toutes américaines. Elles peuvent se diviser de la manière suivante :

A. *Corps aptère.*

Cette division ne comprend qu'une espèce.

T. quadrisignata.—Megacephala, id. *Dej. Species.* V. p. 200. Sénégal.

B. *Corps ailé.*

* *Elytres vertes avec une tache testacée apicale sur chacune.*

Cette division est à elle seule deux fois plus nombreuse que toutes les autres réunies, mais je crois qu'on a trop multiplié les espèces qu'elle renferme en donnant ce titre a de simples variétés. Toutes les espèces sont américaines sauf la *Meg. Euphratica* qu'on peut en regarder comme le type.

** *Elytres vertes sans taches.*

On n'en connait que trois espèces.

(1) Y compris sans doute l'extrémité de la mandibule, sans quoi il n'y a en réalité que trois dents.

T. Virginica.—Cicind. id. *Fab. Syst. El.* I. p. 233. Amér. boréale.
T. Lacordairei. — Meg. id. *Gory. Ann. Soc. entom. de France.* II. p. 117. Cayenne.
T. femoralis.—Meg. id. *Perty, Del. an. art.* p. 1. Tab. 1. f. 2. Brésil.

*** *Corps en entier d'un testacé plus ou moins rougeâtre. Elytres avec des taches ou des bandes noires.*

Les espèces de cette division ont une forme particulière, mais sans offrir de caractères qui permettent d'en faire un genre à part. Elles sont également au nombre de trois.

T. testudinea. — Meg. id. *Klug, Jahrb. der Insekt.* p. 6. pl. 1 fig. 2. Colombie.
T. bifasciata. — Meg. id. *Brullé, Voyag. de d'Orbigny. Entom.* pl. 1. f. 1. Meg. æquinoctialis. *Dej. Spec.* I. p. 14. (1) Colombie.
T. limata. — Meg. id. *Perty, Del. an. art.* p. 1. pl. 1. fig. 1. Megac. nocturna. *Dej. Species.* V. p. 203. Brésil.

VI. (10). Aniara.

Hope, Coleopt. Man. II. p. 7.

Cicindela. *Fab. Syst. El.* I. p. 233. Megacephala. *Dej. Spec.* I. p. 14.

Ce genre proposé par M. Hope pour la *Cicindela sepulcralis* de Fabricius, me paraît pouvoir être adopté, quoique les caractères qui le séparent des *Tetracha* se reduisent à peu de chose ; ils peuvent se formuler ainsi :

Labre recouvrant en grande partie les mandibules, et avancé dans son milieu en un lobe légèrement festonné avec ses angles latéraux arrondis. Yeux moins saillants. Antennes plus courtes, à peine de la moitié de la longueur du corps.

L'espèce ci-dessus est la seule qui puisse rentrer dans ce genre. Ses mœurs confirment sa séparation des *Tetracha*. Tandis que ces

(1) M. Brullé est le premier, qui se soit aperçu que la *Cicindela æquinoctialis* de Linné et Fabricius ne se rapporte pas à cette espèce, comme l'avait pensé M. Dejean, mais au *Brachinus complanatus* qui est si commun à Cayenne. C'est sans doute faute d'avoir lu la description de Linné dans les *Amœnitates academicæ* que M. Dejean est tombé dans cette erreur. Cette description ne peut laisser aucun doute sur la justesse de la rectification proposée par M. Brullé.

dernières volent avec facilité, quoique moins fréquemment que les *Cicindela*, je ne l'ai jamais vu faire usage de ses ailes à Cayenne ou je l'ai rencontrée souvent. On la trouve courant à terre entre les herbes dans les localités sablonneuses des bois. Sa couleur noire et son *facies* lui donnent quelques rapports avec les *Omus*, mais ses caractères génériques sont très-différents.

VII. (11). IRESIA.

Dejean, *Icon. des Col. d'Eur.* I. p. 10.

Hiresia. *Gistl. Syst. Ins.* I. p. 13.

J'ai exposé plus haut les raisons qui m'ont engagé à placer ce genre dans cette tribu qu'il lie à la suivante. Il se distingue de tous ceux de cette famille par un caractère qui lui est propre et qui consiste en ce que le dernier article des palpes labiaux est plus long que le pénultième. L'espèce sur laquelle M. Dejean l'a établi et qui a été découverte par moi au Brésil, est un insecte tellement rare que depuis cette époque déjà éloignée, à peine en a-t-on reçu deux ou trois exemplaires en France. M. Klug en a fait connaître deux autres espèces qui sont du même pays et qui sont inconnues dans les collections de Paris.

1 I. Lacordairei. *Dejean. Species.* V. p. 207.
2 I. binotata. *Klug. Jarb. der Insekt.* I. p. 8.
3 I. bimaculata. *Klug. loc. cit.* I. p. 9.

TROISIÈME TRIBU.

CICINDÉLIDES. *Cicindelidæ.*

Cette tribu est plus riche en espèces que toutes les autres prises ensemble. Telle que je l'établis, elle me paraît, au milieu de formes assez différentes, ne contenir aucun élément étranger. Des palpes médiocres, subégaux ou ce qui est plus ordinaire, les maxillaires plus longs que les labiaux, constituent le principal caractère qui la distingue des autres tribus. Elle se lie, comme je l'ai dit, à la précédente par le genre *Oxygonia* que je place en tête des genres qui la composent, et à la suivante par le genre *Euprosopus* qui a de grands rapports avec les *Therates*.

Je la partage, comme on l'a vu dans le tableau synoptique des genres, en deux divisions basées sur la forme vésiculeuse ou non du 3e article des palpes labiaux.

Première division. 3e *article des palpes labiaux non renflé.*

* *Tarses non sillonés en dessus.*

I. (12). Oxygonia.

Mannerheim. Bullet. de la Soc. Imp. de Moscou. 1837. n° 2.

Ce genre m'est inconnu. Voici avec quelques abréviations les caractères que lui assigne son auteur, M. De Mannerheim :

Labre court, transversal, offrant trois nodosités en dessus, muni de cinq dents; les trois médianes petites, rapprochées et aiguës, les externes obtuses. Mandibules allongées, légèrement arquées au bout, munies intérieurement de six dents presque égales entre elles qui les font paraître presque pectinées. Palpes filiformes, allongés, à articles cylindriques; les maxillaires très-longs; leur 1er article très-court, le 2e fortement allongé, le 3e trois fois plus court, le dernier un peu plus long que le pénultième, obtus à son sommet. Palpes labiaux assez longs; leur 1er article très-court, le 2e très-allongé (1), le dernier deux fois plus court que le précédent, un peu dilaté et arrondi à son sommet. 1er article des antennes renflé, arqué; le 2e très-court, nodiforme ; le 3e allongé, légèrement dilaté à son sommet. Tête non dilatée; front plane; yeux très-grands, globuleux, très-saillants. Thorax à peine plus court que la tête, beaucoup plus long que large, subcylindrique, globuleux en dessus, tronqué et rétréci à sa partie antérieure ainsi qu'à sa base, qui ont une profonde impression transversale et sont striées et comme plissées transversalement, arrondi sur les côtés. Élytres plus de deux fois plus larges que le thorax et quatre fois plus longues, légèrement élargies en arrière, médiocrement convexes en dessus, finement marginées, aplanies à leur extrémité qui est terminée par une pointe aiguë commune. Pénultième segment abdominal du mâle profondément échancré, presque bilobé avec les lobes grands et arrondis; le dernier fendu dans toute sa longueur. Pattes grêles, allongées; cuisses antérieures munies d'une épine aiguë à leur extrémité, les intermédiaires et les postérieures de deux; tarses antérieures du mâle légèrement dilatés; le 1er article allongé, le 2e de moitié plus court, le 3e encore un peu plus court, subappendiculé en dehors, le dernier allongé, grêle, muni d'ongles mutiques.

(1) M. de Mannerheim ne compte, comme on le voit, que trois articles aux palpes labiaux ; il aura sans doute négligé le 1er, ce qui indique qu'il est très-court et ne dépasse pas l'échancrure du menton. D'après sa description le 2e article serait le plus long de tous, ce qui serait plus qu'extraordinaire dans cette famille. Ce que M. de Mannerheim appelle le 2e article est sans nul doute le 3e.

M. de Mannerheim pense que ce genre très-distinct de tous ceux de la famille est voisin des *Euprosopus;* mais ces derniers ont les palpes labiaux très-renflés tandis qu'ici il n'y a rien de pareil. Je crois que sa place est plutôt à côté des *Iresia* dont il se rapproche par sa forme allongée et étroite.

O. Schœnhœri. Supra obscure æenea, capite thoraceque subtiliter strigosis, elytris punctatis postice et lateribus viridi-micantibus, maculis sex testaceis, corpore subtus cupreo-aurato. Long. 7, lat. 2 lin. — Colombie aux environs d'Antioquia.

Mannerheim, *loco cit.*

II. (13). Cicindela.

Linné, Syst. Nat. II. p. 657.

Calochroa. Abroscelis. *Hope, Coleopt. Man.* II. p. 19. Cylindera *Westwood, Magaz. of Zoolog. and Bot.* Laphyra *Dupont in Dej. Cat.* éd. 3, p. 6.

Ce genre, tel que l'a établi M. Dejean dans son *Species*, comprend plus de 300 espèces parmi lesquelles il existe incontestablement des différences assez sensibles, tant dans la forme générale que dans presque tous les organes, quand on examine chacun d'eux en particulier. Désirant réduire ce nombre considérable d'espèces, j'ai non seulement adopté le genre *Odontocheila* fondé par M. De Castelnau sur celles qui composent la première division de M. Dejean, mais encore j'ai séparé toutes celles qui ont les tarses très-grêles et sillonés en dessus dans les deux sexes. Cela fait, il m'a été impossible, malgré tous mes efforts, de trouver des caractères tant soit peu solides pour pousser la division plus loin. En effet, on observe ici ce qui a lieu dans tous les genres très-riches en espèces; les passages d'un groupe à l'autre se présentent à chaque instant; plus on établit de divisions génériques, plus il faut les multiplier, et après tout on finit par être forcé de convenir qu'il reste des espèces qui ne peuvent se placer dans aucune de celles qu'on a créées. C'est ce qui fait que je n'ai pu adopter les quatre genres mentionnés dans la synonimie citée plus haut.

Celui nommé *Calochroa* par M. Hope est établi sur quelques-unes des espèces de la 5e division de M. Dejean (*C. Chinensis*, *octonotata*, *equestris*, *princeps*, *aurofasciata*, etc.) et ses caractères se réduisent à ce que le labre est muni de sept dents. Or, je ne pense pas que quelques dents de plus ou de moins au labre, caractère très-insignifiant quand il est isolé, puissent servir de base à un genre, autrement il faudrait en établir un pour les espèces chez qui cet organe

n'a que cinq dents, ou trois, ou une seule ou point du tout, et l'on séparerait par cette méthode les espèces qui ont entre elles le plus d'analogie.

Le genre *Abroscelis* du même auteur, établi sur la *Cicindela tenuipes* de M. Guérin (*Iconogr.* pl. 3, fig. 7) est beaucoup meilleur au premier coup-d'œil, et serait même très-bon si cette espèce était isolée. C'est en effet, celle qui s'éloigne le plus des autres *Cicindela.* Ses yeux tout-à-fait au niveau du front qui est parfaitement plane, son prothorax trapézoïde élargi à sa base, ayant ses angles postérieurs saillants et lisses en dessus, ses élytres grandes et planes, surtout ses pattes démesurément allongées et ses cuisses postérieures de la longueur du corps lui donnent un *facies* tout particulier. Mais on n'a qu'à la comparer avec les *C. graphiptera*, *upsilon* et *longipes*, qui en sont très-voisines et l'on verra tous les caractères ci-dessus s'altérer promptement. Ainsi, dans la *longipes*, le front commence à s'excaver; le prothorax est presque quadrangulaire; ses sillons transversaux sont assez prononcés en-dessus; les élytres sont d'un tiers moins allongées et les pattes sont sensiblement raccourcies. De cette espèce à la *C. curvata* (Chevrolat) du Mexique, le passage est presque insensible; celle-ci est à son tour très-voisine de la *C. dorsalis* (Say), de l'Amérique boréale et de cette dernière, en passant par la *marginata* et d'autres espèces trop longues à énumérer, on arrive par les transitions les plus imperceptiblement nuancées à l'*hybrida* et espèces voisines. Où trouver par conséquent la limite de ce genre de M. Hope?

J'en dirai autant de celui créé par M. Westwood sous le nom de *Cylindera*, et qui comprend les *C. germanica*, *scataris*, *tenuis*, *Zwickii*, etc. des auteurs. Ces espèces ont certainement un *facies* qui leur est propre; mais elles finissent aussi par se fondre insensiblement dans les espèces ordinaires.

Quant au genre *Laphyra* de M. Dupont, adopté par M. Dejean dans son *Catalogue*, et qui est fondé sur la *Cicindela Ritchii* (1) de Vigors, je ne vois absolument rien qui distingue génériquement cette espèce, de la *C. lurida* du Cap et autres espèces, qui se font remarquer par leur forme large et applatie, leur prothorax cubique à sillons fortement marqués, leurs antennes robustes, leurs pattes proportionnellement plus courtes. Or, la *lurida*, comme on sait, conduit direc-

(1) Elle figure, à tort, comme nouvelle, dans la collection de Paris, sous le nom de *C. Audouini.* Une prétendue espèce qui est inscrite sous le nom de *Laphyra Peletieri* dans les mêmes collections, mérite à peine d'être regardée comme une variété.

tement aux *C. flexuosa*, *Barthelemyi*, *senegalensis*, *abbreviata*, etc., chez qui les caractères que je viens d'énumérer s'affaiblissent peu à peu.

Je laisse donc ce genre tel qu'il est dans le *Species* de M. Dejean, en en retranchant seulement les espèces des 1re, 2e, 3e divisions et une partie de celle de la 4e. Ainsi réduit il se compose encore de près de 250 espèces. N'en possédant guères que le tiers je ne peux essayer d'y établir des divisions et suis obligé d'adopter provisoirement celles qu'a établies M. Dejean et qu'il me paraît inutile de reproduire ici.

*** Tarses sillonnés en dessus dans les deux sexes.*

III. (14). EURYODA.

Heptadonta. *Hope*, *Col. Man.* II. p. 25. Cicindela *auctor.*

Ce genre a été créé par M. Hope sur la *C. analis* de Fabricius et le nom de *Heptadonta* qu'il lui a donné est destiné à rappeler les sept dents dont le labre est muni; or, il y a des espèces appartenant évidemment à ce groupe chez lesquelles l'organe en question ne présente que cinq dents par suite de l'oblitération de ses angles latéraux. Le nom d'*Heptadonta* devenant ainsi tout à fait impropre, j'ai cru devoir le changer. M. Hope ne s'est pas aperçu que dans ce genre les tarses sont sillonnés en dessus, et chose singulière, il dit que la *Cic. quadripunctata* ne doit pas en faire partie, attendu que pour la forme elle ressemble aux espèces de son genre Calochroa (*C. chinensis*, *octonotata*, etc.,) tandis qu'au contraire elle est une des plus cylindriques du groupe, au point que dans l'origine M. Dejean l'avait confondue avec la *concinna*. Quoiqu'il en soit, les caractères du genre sont les suivants:

Corps allongé, subcylindrique. Labre transversal, obtus ou arrondi en avant, muni de cinq ou sept dents dont trois médianes plus ou moins saillantes et une ou deux de chaque côté. Prothorax presque aussi large que long, cylindrique; ses sillons transversaux assez marqués; le longitudinal peu distinct. Élytres subcylindriques, légèrement élargies en arrière. Pattes médiocres; cuisses postérieures dépassant très-peu le bout des élytres.

Les dix espèces suivantes sont les seules, à ma connaissance, qui rentrent dans ce genre; toutes sont de l'ancien continent.

1 E. analis. *Fab. Syst. El.* I. p. 236. Java.
2 E. quadripunctata. *Fab. Syst. El.* I. p. 239. Java.

3 E. concinna. *Dejean, Species.* V. p. 218. Sénégal.
4 E. versicolor. *Dejean, Species.* I. p. 35. Sénégal.
5 E. Leprieuri. *Dejean, Species.* V. p. 219. Sénégal.
6 E. festiva. *Dejean, Species.* V. p. 220. Sénégal.
7 E. ornata. *Klug in Erman's Naturh. Atlas.* pl. 15. fig. 1. Guinée.
8 E. colon. *Klug, Jahrb. der Insekt.* p. 11.
9 E. mirabilis. *Brullé, Arch. du Mus.* I. p. 119. Madasgacar.
10 E. viridicyanea. *Brullé, loco cit.* I. p. 119. Madagascar.

IV. (15). Cheilonycha.

Cicindela. *Dej. Species.* I. p. 38.

La *Cicindela chalybea* qui constitue à elle seule la troisième division du genre *Cicindela* de M. Dejean, et qui appartient à la division actuelle par ses tarses sillonnés en-dessus, me paraît devoir former un genre distinct. Son labre et son *facies* général lui donnent quelque analogie avec les *Centrocheila*, mais tous ses autres caractères sont ceux de la tribu actuelle. Ce genre peut se formuler ainsi :

Corps médiocrement allongé, assez épais, subcylindrique. Labre avancé, cachant en grande partie les mandibules, ayant trois dents médianes dont l'intermédiaire très-saillante (surtout chez la femelle) et deux de chaque côté. Prothorax aussi large que long, arrondi sur les côtés, à sillons transversaux fortement marqués, anguleux dans leur milieu ; le longitudinal presque effacé. Élytres notablement plus larges que le prothorax à leur base, subcylindriques, légèrement élargies et arrondies à leur extrémité. Pattes médiocres ; cuisses postérieures dépassant à peine le bout des élytres.

Je ne connais que l'espèce brésilienne ci-dessus qui puisse rentrer dans ce genre. Mes exemplaires viennent de la province de Goyaz.

V. (16). Phyllodroma.

Cicindela. *Dej. Species.* I. p. 34.

M. Dejean a établi sa seconde division des *Cicindela* sur une seule espèce (*C. cylindricollis*), qui a tous les caractères des espèces de la première (les *Odontocheila*, Castelnau), si ce n'est que le labre, au lieu d'être très-avancé, est au contraire fortement transversal et muni de une à trois petites dents. Ne pouvant pas d'après cela rester avec les *Odontocheila*, cette espèce doit former un genre à part. Il me paraît inutile d'exposer ses autres caractères qui sont les mêmes que

ceux de ce dernier genre. Elle doit également vivre sur les feuilles comme les espèces de celui-ci, quoique on n'ait aucune observation précise à cet égard, et c'est cette habitude que j'ai voulu exprimer par le nom générique que je lui ai imposé. Je dois faire observer que le nombre des dents du labre n'entre pour rien dans les caractères du genre; la forme de cet organe est tout. Je décris plus bas une espèce chez qui il n'offre qu'une dent.

Je crois que les trois espèces brésiliennes suivantes appartiennent également à ce genre :

C. curtilabris. *Klug*, *Jahrb. der Insekt.* I. p. 14.

C. aperta. *Klug*, *loc. cit.* I. p. 15.

C. semi-cyanea. *Brullé*, *Arch. du Mus.* I. p. 118.

M. Dupont m'a communiqué la suivante qui est nouvelle, comme venant des Indes Orientales; mais sans aucun doute cet habitat est erroné et elle doit être originaire du Brésil comme les précédentes.

P. ignicollis. Subtus cæruleo nitida, capite viridi, thorace cupreo fulgente, elytris obscure æneis cyaneo marginatis, maculis tribus lateralibus punctoque subcentrali albis, tibiis genubusque rufescentibus. Long. 5, lat. 1 $\frac{3}{4}$ lin.

Un peu plus petite que l'*Odontocheila margineguttata* à laquelle elle ressemblerait presque complètement pour la forme, si son prothorax n'était pas plus allongé et plus cylindrique. D'un beau bleu brillant avec la tête verte, le dessus du prothorax d'un rouge cuivreux brillant et les élytres d'un bronzé assez obscur; ces dernières ont en outre une assez large bordure d'un bleu mélangé de quelques reflets cuivreux. On voit sur chacune d'elles trois petites taches blanches latérales, une allongée sur l'épaule, une médiane oblongue, la dernière irrégulière près de l'extrémité. Presque au niveau et à peu de distance du bord interne de la tache médiane se voit un petit point de la même couleur. Les cuisses et la base des jambes sont rufescentes, avec des reflets métalliques.

VI. (17). ODONTOCHEILA.

Castelnau, *Revue entom. de Silb.* II. p. 34.

Plochiocera. *Hope*, *Col. Man.* II. p. 18. Therates. *Fischer*, *Entom. imp. Ross.* I. *Gen.* p. 104.

Ce genre comprend toutes les espèces sans exception, qui rentrent dans la 1re division des *Cicindela* de M. le comte Dejean, et se distin-

gue des trois précédents par la forme du labre qui est plus ou moins ovale, très-avancé et muni en général de sept dents. On sait en outre combien le *facies* des espèces qui le composent est différent de celui des autres *Cicindela*. Ce *facies* s'altère cependant un peu dans quelques-unes et il me paraît nécessaire de diviser le genre en deux sections.

Dans la première dont les *O. cayennensis* et *bipustulata* peuvent être regardées comme les types, le corps est svelte, allongé; les élytres sont parallèles, assez étroites, mais non cylindriques, comme on l'a dit souvent; elles sont couvertes de points enfoncés très-serrés qui les font paraître finement rugueuses et leur dessin, quand il y en a un, consiste en deux ou trois petits points blancs presque toujours latéraux et en général peu distincts. Toutes les espèces, ainsi que je l'ai fait connaître le premier, vivent exclusivement dans les bois et se tiennent habituellement sur les feuilles des broussailles.

Cette section est nombreuse et comprend actuellement près de 35 espèces. C'est sur l'une d'elles, l'*O. nodicornis* Dej. que M. Hope a fondé son genre *Plochiocera* caractérisé uniquement en ce que dans les mâles le premier acticle des antennes est renflé en massue aplatie à son extrémité. Ce caractère isolé ne me paraît pas même propre à établir une division dans le genre.

La seconde section ayant pour type la *C. ventralis*, Fab. a le labre fait comme la précédente, mais le corps est moins allongé, plus étroit et beaucoup plus cylindrique; les élytres, outre leur ponctuation ordinaire, sont plus ou moins impressionnées; leur couleur au lieu d'être métallique, comme dans la section précédente, est constamment d'un noir profond, parfois bronzé et à reflets soyeux; leur dessin est également ponctiforme. A en juger par la *ventralis* que j'ai observée très-fréquemment à Cayenne, ces espèces vivent aussi dans les bois, mais au bord des eaux et ne se posent jamais sur les feuilles. A cette espèce il faut joindre les quatre suivantes :

O. distigma. *Dej. Species.* I. p. 35.
O. sericina. *Klug, Jahrb. der Insekt.* I. p. 12.
O. rugipennis. *Kollar, Annal. der Wien. Mus.* I. p. 329.
O. tenebricosa. *Kollar, loc. cit.* I. p. 329.

Les espèces de cette section rappellent un peu par leur forme et beaucoup par la couleur et la sculpture de leurs élytres, l'*Aniara sepulchralis* de la tribu précédente. Je ne leur trouve néanmoins aucun caractère qui puisse autoriser à en faire un genre distinct.

Deuxième division. 3[e] *article des Palpes labiaux renflé et comme vésiculeux.*

VII. (18). PHYSODEUTERA.

Cicindela. *Audouin et Brullé, Arch. du Mus.* I. p. 120.

Parmi les espèces de *Cicindela* décrites par MM. Audouin et Brullé dans le tome I. des *Archives du Museum d'Histoire naturelle*, il s'en trouve une (*C. Adonis*) au sujet de laquelle ces auteurs font observer « qu'elle est remarquable par l'élargissement du pénultième article des palpes labiaux et la petitesse du dernier. » Ce caractère qu'ils n'ont regardé que comme spécifique, est pour moi celui d'une division de la tribu actuelle. M. Dupont m'ayant communiqué cette *C. Adonis* qu'il regardait à tort, comme une espèce nouvelle, j'ai reconnu qu'elle devait former le type d'un genre nouveau dont voici les caractères :

Facies des *Odontocheila*. Labre en ovale allongé, cachant entièrement les mandibules, obtusément caréné dans son milieu sur toute sa longueur, muni de cinq dents, dont trois médianes et deux latérales. Palpes maxillaires plus longs que les labiaux; leur 2[e] article renflé en dehors, déprimé et subréniforme, le dernier trois fois plus long que le pénultième, oblong et déprimé; le 1[er] des labiaux dépassant légèrement l'échancrure du menton, le 3[e] très-fortement renflé; le dernier très-petit, cylindrique, obtus à son extrémité. Une petite dent à peine distincte au milieu de l'échancrure du menton. Prothorax beaucoup plus étroit que la tête (y compris les yeux) et la base des élytres, parfaitement cylindrique, avec ses sillons transversaux assez marqués en dessus et le longitudinal peu distinct. Pattes très-longues, très-grêles; tarses sillonés en dessus.

Les autres caractères sont comme dans les *Odontocheila* que ce genre représente évidemment à Madagascar dont il est originaire. Il est intéressant de retrouver dans ce pays une forme qui jusqu'ici n'avait été observée qu'en Amérique. A peine est-il besoin de faire remarquer les nombreux caractères qui distinguent cette coupe des *Odontocheila*; après le renflement du 3[e] article des palpes labiaux, le plus remarquable est sans aucun doute la forme singulière du 2[e] article des maxillaires que n'ont pas remarquée MM. Audouin et Brullé; c'est elle que j'ai voulu exprimer par le nom que j'ai imposé au genre. Le labre est aussi plus long, plus étroit que celui des *Odontocheila* et sa carène longitudinale lui donne un aspect tout différent.

P. Adonis : Subtus-cæruleo-nitida, supra-viridis, elytris obscurioribus, ore (mandibularum apice prætermisso) coxisque pallide testaceis, femoribus, tibiis tarsisque fuscis ; elytris punctis tribus lateralibus albis. Long. 4, 5 $\frac{1}{2}$. lat. 1 $\frac{1}{3}$, 1 $\frac{3}{4}$ lin. Hab. Madagascar.

VIII. (19). Distipsidera.

Westwood in Jardine and Selby, Magaz. of Zool. and. Bot. I. p. 251.

Je n'ai pas vu ce genre, mais d'après les caractères qui suivent et qui sont empruntés mot à mot à M. Westwood, je ne doute pas qu'il n'appartienne à cette division de la tribu actuelle et ne soit voisin de celui qui précède :

Corps allongé. Abdomen à peine plus large que la tête avec les yeux. Tête grande, sub-ovale, transversalement et irrégulièrement rugueuse. Yeux grands, très-saillants. Antennes à peine plus longues que la tête et le prothorax réunis; leur 1er article gros, un peu arqué, le 2e petit, le 3e le plus long de tous, arqué, renflé à son sommet, les 8 autres presque égaux en longueur, et grossissant un peu graduellement. Labre très-grand, recouvrant les mandibules, oblong-ovale, échancré en avant avec une petite dent au milieu de l'échancrure, ayant en outre quatre fortes dents latérales, et muni de quelques cils allongés, submarginaux. Mandibules robustes, arquées, aiguës, ayant deux dents internes près de leur milieu et deux autres à la base. Palpes maxillaires courts; leur 1er article très-court, le 2e plus gros; les deux suivants grêles, le dernier grossissant un peu à son sommet et subtronqué. Menton très-court, transversal; ses deux lobes latéraux très-grands; une dent à peine visible au milieu de son échancrure. Palpes labiaux courts; leur 2e article très-court, ne dépassant pas les lobes latéraux du menton, le 3e très-grand, fortement renflé et muni sur les côtés de soies rigides, le 4e de la longueur du premier, grêle et lisse. Prothorax de la longueur de la tête (sans le labre), rétréci en avant et à sa base, convexe dans son milieu, arrondi sur les côtés. Élytres subparallèles, plus larges que le prothorax, rugueuses; leurs rides se réunissant transversalement en arrière. Pattes allongées; tarses simples (dans l'exemplaire examiné).

D. undulata. Sub-cupreo-nigra, labio luteo lateribus nigris, elytrorum humeris et apicibus, fasciis duabus undatis, in medio interruptis, albis. Long. 7 $\frac{1}{2}$, lin. Hab. in Nova Hollandia.
Westwood, *loco cit.* pl. 7. fig. 1.

IX. (20). MEGALOMMA.

Westwood, *Annals and Magaz. of nat. hist.* VIII. p. 203.

Je ne connais pas plus ce genre que le précédent et je ne peux que reproduire les caractères qu'en a donnés M. Westwood. Malgré leur brièveté, ils ne peuvent laisser aucun doute sur le droit qu'a l'unique espèce qui le compose à une distinction générique. La vestiture des articles antérieurs des tarses chez les mâles est sans autre exemple dans cette famille et suffirait à elle seule pour justifier la création d'un genre.

Tête très-grande; yeux très-proéminents. Labre grand, entier en avant. Mandibules armées de deux dents entre l'extrémité et la basilaire qui est grande. Pénultième article des palpes labiaux très-renflé. Antennes et pattes très-longues. Prothorax beaucoup plus étroit que la tête, sub-globuleux, étranglé en avant et à sa base. Élytres assez raccourcies. Les trois premiers articles des tarses antérieurs des mâles revêtus en dessous de soies en massue.

M. vigilans. Nigro æenea; capite inter oculos purpurascente, longitudinaliter striatulo; prothorace nitido æneo, annulo postico et elytrorum basi subaureis, elytris obscuris, punctatis, postice magis æneis; antennarum articulo 1mo supra et subtus albido, palpis albidis articulo ultimo nigro, pedibus fuscis, femoribus ad basin, coxis mandibulisque albidis, harum dentibus piceo-nigris. Long. 4 lin.

Hab. in insula Mauritia.

Westwood, *loco cit*, p. 204.

M. Westwood exprime avec quelque doute, l'opinion que la *C. viridula* de Quensel (*Schœnh. Syn. ins.* III. p. 343 note) qui fait partie de la 7e division des *Cicindela* de M. Dejean, appartient à ce genre.

X. (21). APTEROESSA.

Hope, *Coleopt. Man.* II. p. 159.

Cicindela. *Fab. Syst. El.* I. p. 231.

La *Cicindela grossa* de Fabricius doit évidemment former un genre propre ainsi que l'a pensé M. Dejean et comme il est facile de s'en convaincre en jetant un coup d'œil sur la figure qu'en a donnée Olivier, toute médiocre qu'elle est. Cette espèce n'existe pas dans les collections de Paris. Mais M. Hope qui la possède ou qui a eu occasion de la voir, en a publié une bonne figure dans l'ouvrage cité plus haut,

et a fondé sur elle le genre actuel. Les caractères qui suivent ont été rédigés d'après ceux donnés par cet entomologiste et les détails qui accompagnent la figure dont je viens de parler.

Corps aptère. Tête assez forte, de la largeur du prothorax. Labre court, légèrement arrondi en avant et muni de sept petites dents. Palpes égaux ; le dernier des maxillaires un peu plus long que le pénultième, ovale-oblong et tronqué à son extrémité ; le 1er des labiaux dépassant assez fortement l'échancrure du menton, le 3e très-grand, fortement renflé, le 4e pareil au dernier des maxillaires. Une forte dent aiguë au milieu de l'échancrure du menton. Antennes de la longueur de la moitié du corps. Yeux assez grands, oblongs, latéraux, sans orbite supérieure. Prothorax plus large que long, un peu rétréci en arrière; ses sillons en dessus bien marqués. Élytres oblongues, un peu plus larges à leur base que le prothorax, légèrement acuminées à leur extrémité. Pattes longues, grêles ; tarses un peu plus courts que leurs jambes respectives: les antérieurs simples chez les femelles.

Par sa forme générale l'espèce unique qui compose ce genre paraît avoir beaucoup de ressemblance avec certaines *Tetracha*, surtout avec la *T. quadrisignata*.

XI. (22). DROMICA.

Dej. Species. II. p. 435.

Cicindela. *Latr. et Dej. Iconog.* I. p. 37.

Ce genre fondé par M. Dejean et adopté par tous les entomologistes et un des plus distincts de la famille. On en connaît aujourd'hui six espèces qui sont toutes de l'Afrique australe.

1 D. coarctata. *Latr. et Dej. Iconog.* I. p. 37 pl. 1 fig. 5.
2 D. vittata. *Dej. Species.* V. p. 269.
3 D. tuberculata. *Dej. Species.* V. p. 270.
4 D. trinotata. *Klug, Jahrb. der Insekt.* p. 40.
5 D. interrupta. *Klug, loc. cit.* p. 40.
6 D. Clathrata. *Klug, loc. cit.* p. 40.

XII. (23). EUPROSOPUS.

Latreille in Dej. Spec. I. p. 151.

Cicindela. *Latr. et Dej. Iconog.* I. p. 38.

L'*Euprosopus 4-notatus* unique espèce de ce genre s'éloigne par ses formes de toutes celles qui compose cette famille, à l'exception peut-

être du genre *Oxygonia* que je n'ai pas vu, et a des rapports évidents avec les *Therates ;* aussi je pense qu'elle doit terminer la tribu actuelle.

M. Hope (*Col. Man.* II. p. 17) dit avoir vu une seconde espèce de ce genre, mais il ne la décrit pas.

QUATRIÈME TRIBU.

Collyrides. *Collyridæ.*

Cette tribu est avec la suivante, la plus naturelle de la famille. La forme particulière du 4e article des tarses antérieurs et quelquefois de tous les tarses, l'isole nettement et ne permet pas de la confondre avec les autres tribus. Elle se lie néanmoins très-bien à la précédente par le genre *Euprosopus* qui termine cette dernière. Ce genre a en effet la plus grande analogie avec les espèces de celle-ci par sa forme générale, son labre et ses palpes, mais son menton est pourvu de dent et le quatrième article de ses tarses est simple, comme chez les autres Cicindélides. L'analogie est au premier coup d'œil encore plus forte entre les Collyrides et les Cténostomides. Mais en réalité elle est moindre et se borne à des rapports généraux de forme et de *facies.* Chez ces derniers insectes les palpes sont aussi allongés qu'ils sont courts dans ceux-ci, le labre est autrement fait, enfin le lobe interne des mâchoires est inerme.

Toutes les Collyrides sont, comme on sait, propres à l'archipel indien et contrées voisines. Quoiqu'on en connaisse déjà un assez grand nombre d'espèces, ce sont des insectes en général rares dans les collections. Les trois genres qu'ils constituent sont bien connus des entomologistes et n'exigent presque aucune observation.

I. (24). Therates.

Latreille, *Règne anim.* 1re éd. III. p. 179.

Eurychile. *Bonelli*, *Mem. Acad. di Torino.* XXIII, p. 256.

Cicindela. *Fab. Syst. El.* I. p. 232.

La forme particulière du lobe externe des mâchoires qui est spiniforme au lieu d'être biarticulé constitue le principal caractère de ce genre qui me paraît représenter dans le pays qu'il habite, les *Euprosopus* de l'Amérique ; c'est pourquoi je le place à la tête de cette tribu. Il se compose actuellement d'une quinzaine d'espèces.

II. (25). Tricondyla.

Latreille, *Règne anim.* 1re éd. III. p. 179.

Collyris. *Fab. Syst. El.* I. p. 226. Cicindela. *Oliv. Entom.* II. 33. p. 9.

Ce genre est dans l'archipel indien l'analogue évident des *Ctenostoma* de l'Amérique ; ses habitudes paraissent être les mêmes que celles de ces dernières. On en connaît aujourd'hui cinq espèces (1) :

1 T. connata. *Gistl*, *Syst. Ins.* I. p. 82. Colliuris connata. *Lamarck Anim. sans vert.* 2e éd. IV. p. 677. Tric. aptera. *Dej. Species.* II. p. 438.
2 T. cyanea. *Vander Linden*, *Mém. Acad. Brux.* V. p. 27.
3 T. atrata. *Brullé*, *Hist. nat. des Ins.* IV. p. 106.
4 T. cyanipes. *Eschsch. Zool. Atlas.* I. p. 6. pl. 4. fig. 2.
5 T. Chevrolatii. *Casteln. Revue entom. de Silb.* II. p. 38.

III. (26). Collyris.

Fab. Syst. El. I. p. 226.

Colliuris. *Latr. Gen. Crust. et Insect.* I. p. 174.

Cicindela. *Oliv. Entom.* II. 33. p. 7.

A l'exemple de M. Brullé je restitue à ce genre le nom que lui avait imposé primitivement Fabricius et que Latreille a changé arbitrairement en celui de *Colliuris.* Ses analogies ne sont pas aussi évidentes que celles des deux genres précédents et il ne me paraît pas avoir de représentant exact dans la famille, ni en Amérique ni ailleurs. MM. Mac Leay et Klug ont signalé celle qu'il a avec les carabiques du genre *Agra* et elle est en effet aussi frappante que cela peut avoir lieu entre des insectes appartenant à deux familles distinctes.

Le nombre des *Collyris* décrites dans les auteurs s'élève en ce moment à plus de vingt et il existe plusieurs inédites dans les collections.

(1) M. Gistl (*Syst. Ins.* I. p. 22) en mentionne six, attendu qu'il fait entrer dans ce genre la *Cicindela aptera* de Tænder-Lund (*Acta Hafn.* I. p. 71. pl. 6. A.), erreur qui ferait croire qu'il n'a jamais jeté un coup d'œil sur la figure qu'en a donnée cet auteur. Elle représente incontestablement une *Collyris*, ainsi que Latreille (*Iconog. des Col. d'Eur.* I. p. 66.) l'avait bien reconnu. La synonimie que M. Gistl a entassée sous cette prétendue *Tricondyla* est toute entière à refaire.

CINQUIÈME TRIBU.

CTENOSTOMIDES. *Ctenostomidæ.*

Les espèces de cette tribu manquant d'onglet articulé au lobe interne des mâchoires sont des Cicindélides au moindre titre possible et n'appartiendraient pas même à la famille si l'on accordait une valeur trop absolue à ce caractère. Mais c'est là une exception comme il en existe partout, même dans les groupes les plus naturels, et elle prouve seulement que ces insectes doivent terminer la série à laquelle ils appartiennent. C'est en effet la place que leur ont assignée tous les auteurs ; seulement ayant trop égard à la forme générale du corps, ils leur ont adjoint, comme on l'a vu plus haut, les espèces de la tribu précédente. Ce groupe épuré, comme je l'établis ici, est encore plus naturel que celui des Collyrides.

I. (27). PSILOCERA.

Brullé in Gory et Casteln. Monog. des Col. I.

Stenocera, *Brullé*, *Hist. nat. des Ins.* IV. p. 109. Pogonostoma. *Klug in Wiegman's Archiv.* A. 1835. I. p. 382.

M. Brullé a fondé ce genre en 1834 dans son *Histoire naturelle des insectes*, sous le nom de *Stenocera* qu'il changea plus tard en celui de *Psilocera*. L'année suivante, en 1835, M. Klug l'établit dans les *Archives* de Wiegman sous le nom de *Pogonostoma*, sans citer M. Brullé, et en décrivit cinq espèces. En 1837, MM. Gory et de Castelnau en publièrent une monographie dans laquelle adoptant le nom de *Psilocera* ils en décrivirent 11 espèces, sans citer à leur tour le travail de M. Klug, qui avait cependant plus d'une année et demie d'existence. Il résulte de là que M. Brullé est l'auteur du genre, que le nom de *Psilocera* qu'il lui a donné en second lieu doit avoir la préférence sur celui de *Pogonostoma* de M. Klug, enfin que les cinq espèces décrites par ce dernier auteur ont la priorité sur un pareil nombre de celles publiées par MM. Gory et de Castelnau.

Ces insectes sont originaires de Madagascar où ils me paraissent représenter les *Procephalus* de l'Amérique.

II. (28). PROCEPHALUS..

Casteln. Revue entom. de Silb. II. p. 35.

Caris. *Fischer*, *Entom. imp. Ross.* I. *Genera.* p. 98. Ctenostoma. *Klug Nov. act. acad. nat. cur.* X. II. p. 304.

Ce genre a été établi par M. Fischer de Waldheim sous le nom de

Caris qui n'a pas pu être adopté ayant déjà été employé depuis longtemps pour un groupe d'Arachnides. M. Klug le changea avec raison en celui de *Ctenostoma*, mais à l'espèce décrite par M. Fischer il en joignit d'autres qui présentent des caractères suffisants pour constituer un genre à part et cet exemple a été suivi par tous les auteurs qui se sont occupé de ces insectes. M. de Castelnau est le premier qui ait divisé le genre *Ctenostoma* en deux, en réservant ce nom aux espèces qui ont les élytres très-rétrécies à leur base et renflées à leur extrémité, et donnant celui de *Procephalus* à celles chez qui ces organes sont cylindriques dans toute leur étendue ou aux *Caris* de M. Fischer. Quoique fondé sur ce caractère presque unique ce genre *Procephalus* me paraît pouvoir être adopté. M. de Castelnau lui assigne encore des palpes un peu plus ovalaires à leur extrémité, et un labre plus court; mais ces caractères ne sont qu'accessoires et en réalité très-peu importants.

La figure que M. Fischer a donnée de l'une des mâchoires de l'espèce qu'il a décrite, représente cet organe comme muni d'un onglet articulé, ce qui est sans doute une erreur du dessinateur. M. Brullé (*Hist. nat. des ins.* IV. p. 107) a reproduit ce caractère et le donne comme un des principaux qui distinguent ce genre des *Psilocera* et des *Ctenostoma*. J'ai examiné la bouche de quatre espèces de *Procephalus* et dans aucune je n'ai trouvé la moindre trace de l'onglet en question.

Toutes les espèces de ce genre sont américaines et très-rares dans les collections. On en connaît actuellement cinq qu'on peut répartir dans deux divisions basées sur la forme du dernier article des palpes.

* *Dernier article des palpes renflé, comme turbiné et pointu.*

1 P. Jacquieri. — Ctenost. id. *Dej. Species.* V. p. 271.

** *Dernier article des palpes ovoïde, élargi à sommet et comprimé.*

2 P. ornatus. — Ctenost. ornatum, *Klug, Jahrb. der Insekt.* I. p. 42. pl. 1, fig. 3.

3 P. trinotatus. — Caris trinotata. *Fischer de Waldh. Entom. imp. Ross.* I. *Genera.* p. 99. pl. 1. fig. 3. (La pl. porte *Caris trifasciata*).

4 P. succinctus. *Casteln. Revue entom. de Silb.* II. p. 36.

5 P. metallicus. *Casteln. loco cit.* p. 36.

III. (29). CTENOSTOMA.

Klug, *Nova act. acad. nat. cur.* X. II. p. 304.

Collyris, *Fab. Syst. El.* I. p. 226.

J'ai tracé plus haut brièvement l'histoire de ce genre en faisant celle des *Procephalus*. Comme on l'a vu il ne se distingue de ces derniers que par la forme de ses élytres qui sont très-rétrécies à leur base et renflées à leur extrémité, ce qui les fait ressembler à un ovoïde très-allongé. Le labre est aussi un peu plus grand. A ces différences il faut ajouter que les ailes inférieures paraissent moins développées. M. Westwood à qui on doit cette observation (*Zool. Journ.* V. p. 53.) a trouvé que chez le mâle du *C. ichneumoneum* les organes en questions ont environ la longueur des deux tiers des élytres et ne sont pas plissés tandis que dans la femelle ils sont presque complètement avortés. Ces insectes étant fort rares et n'ayant à ma disposition que des exemplaires qui ne m'appartiennent pas, je n'ai pu vérifier ce qui en est et si toutes les espèces sont dans le même cas.

Ces dernières sont en ce moment au nombre de huit, provenant toutes du Brésil ou de Cayenne.

1 C. ichneumoneum. *Dej. Species.* II. p. 436.
2 C. breviusculum. *Mannerheim*, *Bullet. de la Soc. de Moscou.* 1837. n° 2.
3 C. Klugii. — Ct. trinotatum. *Klug. Entom. Monog.* p. 5. (1)
4 C. bifasciatum. *Dej. Species.* V. p. 272.
5 C. rugosum. *Klug*, *Entom. Monog.* p. 7.
6 C. formicarium. *Klug*, *Entom. Monog.* p. 4. Collyris formicaria. *Fab. Syst. El.* I. p. 226.
7 C. unifasciatum. *Dej. Species.* V. p. 272.
8 C. macilentum. *Klug*, *Jahrb. der Insekt.* I. p. 42.

(1) M. Klug a nommé cette espèce *trinotatum* la croyant identique avec le *Caris trinotata* de Fischer qui est très-différent et appartient au genre *Procephalus*. Afin d'éviter toute confusion j'ai cru devoir lui imposer un nom nouveau. Dans ses *Entom. Monogr.* M. Klug rapporte à cette espèce le *Ctenostoma formicarium* figuré par Latreille dans l'*Iconog. des col. d'Europe*, tandis que dans son *Jahrb. der Insekt.* il réunit cette dernière à la *Collyris formicaria* de Fabricius. Je crois qu'il se trompe dans les deux cas, malgré l'autorité de M. Dejean qui a aussi adopté cette dernière façon de voir.

IV. (30.) MYRMECILLA.

Ctenostoma. *Buquet in litter.*

J'ai établi ce nouveau genre sur un petit insecte du Brésil qui m'a été communiqué par M. Buquet sous le nom de *Ctenostoma pygmæum*. Par ses élytres il tient le milieu entre les *Procephalus* et les *Ctenostoma*, quoique plus rapproché cependant de ces dernières ; mais son labre, ses palpes labiaux démesurément allongés, la forme du dernier article des maxillaires, la brièveté de ses cuisses, le renflement des antérieures, l'éloignent de ces deux genres et sont des caractères plus que suffisants pour lui assigner une place à part. Ses caractères peuvent se formuler de la manière suivante :

Forme générale intermédiaire entre celle des *Procephalus* et des *Ctenostoma*. Labre fortement transversal et muni de quatre petites dents obtuses en avant. Palpes très-allongés ; les maxillaires d'un tiers plus courts que les labiaux ; leur 2e article cylindrique, nullement dilaté intérieurement ; le dernier plus long que le pénultième, un peu élargi au bout et comprimé ; le 3e des labiaux excessivement allongé ; le dernier très-court, turbiné et comprimé. Antennes de la longueur de la moitié du corps. Élytres subcylindriques, légèrement rétrécies à leur base, sans trace d'angles huméraux et non renflées à leur extrémité. Pattes plus courtes que chez les *Ctenostoma ;* cuisses antérieures ovoïdes, renflées ; les postérieures ne dépassant pas l'extrémité des élytres.

M. pygmæa. Nigroænea, elytris basi profunde ultra medium minus punctato-rugosis, apice valde emarginatis, pilis longis erectis sparsim obtectis, fascia media communi apiceque testaceis, pedibus fuscis. Long. 3, lat. $\frac{1}{2}$ lin. Brasilia.

L'exemplaire d'après lequel a été faite cette description est une femelle.

V. *Note sur l'oreille externe des Oiseaux de Proie nocturnes,*

par M. P. J. VANBENEDEN,
Professeur de zoologie et d'anatomie comparée à l'Université
de Louvain, etc.

(*Planche* 3).

La structure intime de l'oreille a occupé dans ces dernières années plusieurs anatomistes distingués. Les mammifères, les oiseaux et les reptiles ont été étudiés avec un soin presque égal. Dans un travail spécial sur l'organe de l'audition dans les oiseaux, M. Breschet a résumé tout ce que la science possède sur ce sujet, et enrichi cette partie de l'anatomie d'intéressantes observations (1).

A voir le soin et le temps que le célèbre professeur de l'école de médecine a mis à ce travail, il semblerait que d'ici à longtemps on ne signalera rien de nouveau dans cet appareil compliqué. Cependant nous allons faire connaître dans cette note, une disposition consignée dans un ouvrage publié au milieu du siècle dernier, et qui n'en paraîtra pas moins nouvelle (2); elle intéressera les naturalistes sous plus d'un rapport. Il est remarquable, dit Klein, que le conduit auditif du côté droit diffère de celui du côté gauche, et que ces parties paraissent disposées pour recevoir les sons, d'un côté d'en haut et de l'autre côté d'en bas. L'auteur parle de la Hulotte (Strix aluco M.). Nous avons constaté l'exactitude de l'observation de Klein.

Nous ne pouvons nous empêcher de faire remarquer que cette différence dans le côté droit et le côté gauche a été observée par le dessinateur qui a fait les planches du travail de M. Breschet et qu'elle paraît avoir échappé à l'auteur, puisqu'il n'en est pas question dans le texte.

Il était cependant important de signaler cette nouvelle exception à la loi de symétrie des animaux supérieurs. Les oiseaux ne nous avaient pas encore montré un exemple d'irrégularité dans les organes de la vie de relation de droite et de gauche, tandis que nous trouvons

(1) Breschet, *Recherches anatomiques et physiologiques sur l'organe de l'audition chez les oiseaux.* In-8. Paris, 1836.

(2) J. T. Klein, *Ordo avium.* p. 54.

Sepp, *Nederlandsche Vogelen.* 1re part., p. 63.

dans la classe des mammifères, les cétacés qui ont ordinairement le côté droit de la tête différent du côté gauche, et tout le monde connaît le curieux exemple que nous fournissent les poissons pleuronectes.

Dans les organes de la vie de conservation on aperçoit au contraire que l'irrégularité est presque la règle. Ainsi le tube digestif et ses dépendances glandulaires, le scrotum et les reins présentent chez les mammifères des différences à droite et à gauche. Dans les oiseaux l'appareil sexuel mâle et femelle ainsi que le larynx inférieur diffèrent notablement. Les ophidiens n'ont qu'un poumon bien développé et leur testicule est situé d'un côté beaucoup plus haut que du côté opposé. On en voit aussi différents exemples dans les poissons.

C'est Bichat qui a fait remarquer le premier cette déviation des organes de la vie de conservation.

Depuis longtemps nous avons remarqué cette particularité dans la chouette Brachiote. Ne trouvant rien dans les auteurs modernes, sur ce sujet, nous croyions le fait nouveau, lorsque le hazard nous fit connaître une citation dans Sepp qui se rapporte à ce sujet. Klein ne l'a observé que dans une espèce. Nous avons eu l'occasion de constater cette particularité dans différents rapaces nocturnes du pays.

On sait que dans les différentes espèces de hiboux et de chouettes les plumes sont disposées autour du méat auditif de manière à former par leur écartement un cornet acoustique, un pavillon de l'oreille, semblable pour les résultats à celui des mammifères. Ces plumes sont disposées de la même manière à droite et à gauche. La direction des yeux en avant qui donne à ces oiseaux leur physionomie particulière, est due en grande partie à cet arrangement des plumes.

En écartant ces plumes on ouvre le pavillon et l'on aperçoit dans le moyen Duc une large cavité, comme une fente longitudinale, dirigée obliquement de bas en haut et d'avant en arrière. Une membrane très-mince et dépourvue de plumes tapisse cette cavité. Elle recouvre immédiatement les os. Cette membrane forme vers le milieu différents replis comme on en voit dans l'oreille externe des mammifères et c'est à ces replis qu'est dû la particularité qui fait le sujet de cette notice. Les os sont des deux côtés exactement les mêmes.

Il y a un repli transverse vers le milieu du pavillon (*a*). Il sépare la cavité en deux moitiés à peu près égales. Le trou auditif est du côté gauche au-dessus de ce repli, tandis que le côté droit présente le méat auditif au-dessous. Une dépression du côté droit, et qui ne forme ici qu'un cul de sac, montre la place qu'occupe ce méat du côté opposé. Le conduit auditif lui-même ou le tube qui mène à

la membrane du tympan est dirigé à droite de bas en haut et de haut en bas du côté opposé. Une saillie osseuse du crâne (*e*) montre les parties qui se correspondent des deux côtés.

Dans le Brachiote (Stryx brachiotos), l'oreille externe est à peu près la même; mais il y a cette différence dans la chouette effraie (Strix flammea), que des plumes fines garnissent tout l'intérieur du pavillon et qu'il existe en avant un repli, disposé comme un opercule pour boucher plus exactement le conduit.

La présence de cet opercule a du reste été signalée déjà dans les *Leçons d'anatomie comparée* de Cuvier, ainsi que par M. de Blainville dans ses *Principes d'anatomie comparée*.

Il résulte de cette disposition que ces oiseaux sont impressionnés par le bruit qui part d'un côté d'en bas et de l'autre côté d'en haut, et qu'ils perçoivent le moindre trémoussement qui se fait autour d'eux en ne mouvant la tête que très-légèrement.

L'organe de l'audition paraît être celui qui les dirige pendant la chasse. C'est leur organe des sens le plus délicat; mais comme ils ont le cou court et que les mouvements de la tête sur le cou, ne s'opèrent pas aussi facilement que chez les autres oiseaux, on conçoit le motif de cette organisation particulière des conduits auditifs.

Chez les oiseaux à cou long, la facilité de tous les mouvements de la tête supplée au défaut de pavillon et le mammifère peut diriger son pavillon du côté qui vient le frapper.

Le nombre des oiseaux de proie nocturnes a considérablement augmenté dans ces dernières années. On a cherché par tous les moyens à établir parmi eux des coupes génériques; mais le bec, comme les pattes, les ailes, et les aigrettes n'ont fourni que des caractères très-peu importants, et souvent c'est le *facies* qui décide du genre auquel telle ou telle espèce doit appartenir. Le *facies* est souvent la pierre de touche pour l'ornithologiste. Il peut s'en servir dans quelques cas pour la distinction des espèces, mais il faut à un genre des caractères fixes et visibles à l'extérieur. Or, le conduit auditif réunit ces conditions. Il suffit d'écarter les plumes qui forment le cornet acoustique pour apprécier les modifications qu'il subit. La direction du conduit, ainsi que l'absence ou la présence d'un opercule, l'étendue du pavillon et la nudité de la peau qui tapisse le fond sont autant de caractères qui pourront être employés pour les distinctions génériques. Mais avant qu'on en fasse l'application, le plus grand nombre des espèces indigènes et exotiques devront être étudiées avec soin.

Explication de la planche.

La figure I représente le pavillon du Strix otus, vu du côté droit; la figure II est la même vue, du côté opposée ou à gauche. Dans les deux figures une ligne transverse coupe le pavillon en deux pour montrer les parties qui se correspondent. Les mêmes lettres désignent les mêmes objets.

a. Repli médian.
b. Dépression supérieure.
c. Dépression inférieure.
d. Trou auditif.
e. Saillie osseuse.
f. Limites antérieures de ce même pavillon.
g. Limites postérieures.

VI. *Mémoire sur les Corpuscules de la Rate*,

par **M. A. SPRING**,

Professeur de physiologie et d'anatomie générale à l'Université de Liége, etc.

PREMIÈRE PARTIE.

Quand on considère combien ont été infructueux les efforts qu'on a faits de tout temps pour connaître le rôle que joue la rate dans l'organisme animal, on est tenté de se laisser aller au découragement qui semble s'être emparé de plusieurs philosophes-naturalistes de l'antiquité lorsqu'ils disaient que cet organe est absolument sans usage et que son existence n'est due qu'à un caprice ou une bizarrerie de la nature. Prométhée, dit un ancien mythe, lorsqu'il était occupé à former l'homme, s'oublia un jour au point de s'enivrer et le résultat de son travail pendant son ivresse a été la rate. Plusieurs des hypothèses modernes, si on les traduisait dans le langage mythologique, pourraient figurer sans trop de désavantage à côté de celle-ci.

Cependant la difficulté d'éclaircir ce point de physiologie n'est pas aussi insurmontable qu'on le pense ordinairement. Seulement il ne faut pas prétendre arriver d'emblée à la solution de la question principale. Avant qu'il soit possible de l'obtenir, il reste plusieurs questions secondaires à vider préalablement. L'une des plus importantes est sans contredit celle qui concerne les corpuscules de la rate. Ayant fait sur ce sujet plusieurs observations qui me paraissent offrir quelque intérêt, je crois devoir les publier malgré l'état d'imperfection dans lequel elles se trouvent encore. Mais avant de le faire il m'a semblé utile de commencer par exposer les opinions diverses qui ont été émises sur les corpuscules en question.

Mon intention n'est pas de faire ici l'histoire des recherches anatomiques sur la structure intime de la rate non plus que des doctrines physiologiques qui ont été mises en avant sur ses fonctions. Ce travail a été exécuté par quelques auteurs qui, dans ces derniers temps, se sont occupés d'une manière générale de cet organe, et l'on trouvera notamment tous les renseignements désirables sur ce sujet dans l'excellente monographie de M. Giesker de Zurich (1). Les opinions

(1) *Splenologie.* Zurich 1835. p. 89-140.

émises sur les corpuscules qui font l'objet de ce mémoire sont les seules que j'aie à examiner. Cette question spéciale mais intéressante n'ayant pu nécessairement occuper qu'un rang secondaire dans les ouvrages généraux dont je viens de parler, il en est résulté que leurs auteurs non seulement n'ont pas toujours rendu en entier et avec toute l'exactitude désirable ce qu'ont dit sur ce sujet leurs devanciers, mais encore qu'ils n'ont pas toujours énoncé d'une façon parfaitement nette leur manière de voir; aussi aurai-je soin de citer de préférence les passages de leurs écrits où leurs opinions se trouvent le plus clairement exprimées. Mon but n'étant pas de faire l'historique de la question, mais un relevé des opinions, je ne m'astreindrai pas à suivre l'ordre chronologique. Je m'attacherai surtout à mettre en relief les opinions principales en ne traitant que secondairement de celles qui ne seront que des modifications de chacune d'elles, quelles qu'aient été d'ailleurs les différences dans la manière de voir de leurs auteurs quant aux autres points de la structure de la rate.

Enfin je négligerai entièrement les doctrines qui n'ont jamais eu les honneurs de la discussion, et qui n'auraient qu'un intérêt de pure curiosité. Qui se soucie aujourd'hui, par exemple, de ce que Daniel Tauvry a dit sur les corpuscules en question qu'il regarde comme les tendons des fibres musculaires qui existent, selon lui, dans le tissu de la rate, et de ce que d'autres ont rêvé sur les sucs nerveux qui y seraient sécrétés et de là se rendraient aux nerfs?

Malpighi. Boerhaave. De Lasône. Heusinger en 1817. *C. A. Schmidt.*

La connaissance des corpuscules propres de la rate ne date guères que de Malpighi (1666).

Ce grand anatomiste les décrit (1) comme des *glandules* blanches, ovales, de la grandeur des glandules des reins (*Corpuscules de Malpighi*) et disposées à la façon des grappes de raisin, à raison de sept à huit par grappe. Dans des rates injectées il a pu s'assurer qu'elles sont en rapport avec les prolongements de la capsule (ce qu'on appelle

(1) « Minimæ hæ glandulæ figuram habent ovalem, et magnitudine parum distant à renum glandulis; colorem habent, ut perpetuo observavi, album, et licet lienis sanguinea vasa injecto atramento turgeant, et circa ipsas ludant, hæc tamen eundem servant colorem. Earum substantia quasi membranacea videtur, sed mollis, facileque friabilis; ejus cavitas ob exiguitatem oculorum aciem effugit, conjectura autem attingitur, dum scissæ in se ipsas concidere videntur. » *Opp. omn. Tom. II, edit Londin.* 1686; *de viscerum structura* p. 111.

aujourd'hui la substance blanche de la rate ou la gaine des vaisseaux) et que les derniers ramuscules des artères viennent se distribuer à leur surface (1).

Si l'on complète ce qui précède à l'aide de quelques autres passages de Malpighi, dispersés dans ses ouvrages, il en résultera que son opinion peut se formuler de la manière suivante :

Les corpuscules en question sont de véritables *glandes simples* (*glandulæ simplicissimæ vel sacculi*), c'est-à-dire, des follicules sécréteurs semblables aux follicules muqueux et sébacés. Ils sont creux à l'intérieur et formés extérieurement par une membrane qui affecte la forme d'un petit sac, et dans les parois de laquelle viennent se ramifier des ramuscules artériels (et même des nerfs), qui toutefois, ne débouchent pas dans la cavité même de la glandule. Les liquides sécrétés seraient d'une nature particulière et serviraient de ferment pour la sécrétion de la bile, attendu que les veines de la rate doivent être considérées comme servant de canaux excréteurs pour le fluide liénique qui arriverait par cette voie dans la veine-porte et dans le foie (2).

Ces idées, quoique appuyées par des autorités telles que Bidloo, W. Cowper, Gaspard Bartholin, Winslow, Lieutaud, Boerhaave, etc., furent cependant mises de côté par suite de la controverse qui s'était engagée au sujet de la structure des glandes en général, d'une part entre les partisans de Malpighi et de l'autre entre Fr. Ruysch et les siens. Ces derniers remportèrent la victoire, car dans la science aussi, il est des victoires remportées sur le bon droit et sur la vérité. Ce n'est qu'après un siècle d'oubli que les idées de Malpighi ont été remises en honneur.

Parmi ceux qui ont adopté la façon de voir de ce grand anatomiste il en est plusieurs, qui, en la développant, y ont ajouté leurs idées particulières.

(1) Mire locantur pendentque a propaginibus capsulæ, sive a fibris ab ipsa ortis, et consequenter ab extremis arteriarum et nervorum finibus; quin et arteriarum fines, capreolorum instar, vel serpentis hederæ circa ipsas producuntur, quod in recenti adhuc liene denigratis arteriis observatur. *l. c.* — En revenant plus tard sur ces glandules, dans ses œuvres posthumes, où il fait une révision de tous ses travaux anatomiques, Malpighi affirme de nouveau, qu'elles sont entourées extérieurement par les plus fins ramuscules artériels, qu'elles sont creuses à l'intérieur, enfin, qu'elles sont formées par une membrane blanche. *Opp. posth. edit. Lond.* 1697. p. 42.

(2) *De viscerum structura* p. 117.

C'est ainsi que le grand Boerhaave a appliqué aux glandules de la rate l'opinion qu'il s'était formée sur la structure des glandes en général (1). Dans son système les artères se termineraient de deux manières dans ces organes; une partie de leurs ramuscules passerait immédiatement dans les veines en formant un réseau très-serré et très-fin; l'autre plus fine encore se répandrait sur la membrane tenue qui constitue les follicules creux et qui est la base de la structure de toute glande quelconque. C'est par cette dernière sorte d'artérioles que passe le liquide sécrété, la *lymphe* comme l'appelle Boerhaave, pour arriver dans la cavité des follicules, tandis que les parties plus consistantes du sang passeraient directement dans les veines par le réseau indiqué plus haut. A ce réseau artériel correspondent, sur les parois des follicules, d'autres réseaux veineux, qui sont destinés à recevoir les liquides sécrétés dans les follicules pour les conduire dans le courant sanguin (2).

Selon Boerhaave les corpuscules de la rate seraient donc une espèce de follicules intermédiaires entre les artères et les veines, et qui serviraient d'un double filtre pour le sang qui doit les traverser.

De Lasône, dont l'*histoire anatomique de la rate* a été présentée, en 1754, à l'académie des sciences de Paris (3), appelle les corpuscules en question, des *follicules pulpeux*. Il combat fortement les conclusions de Ruysch, et soutient les faits anatomiques reconnus par Malpighi. Cependant, il s'était formé quant aux usages de ces petits organes, une opinion particulière, dont il promettait de publier les détails dans un second mémoire, qui, malheureusement, n'a pas paru. Tout ce que nous savons donc de l'opinion de Lasône, c'est qu'il ne regardait pas ses *follicules pulpeux* comme des glandes simples, isolées ou solitaires, ainsi que Malpighi le prétendait, mais plutôt comme des organes singuliers d'une nature particulière (4).

Parmi les auteurs modernes, qui ont soutenu une opinion à peu-près identique à celle de Malpighi, il faut citer en première ligne, C. F. Heusinger (5). Ce physiologiste a non-seulement vérifié tous

(1) *Institut. medic. edit. Leydens.* VI. 1746. p. 136. n° 242-254.

(2) *Institut. med.* p. 170. n° 315-319.—Comparez aussi l'amplification des idées de Malpighi dans la lettre, adressée par Boerhaave à Ruysch, au sujet de la structure des glandes, in *Ruysch opuscul. anat. de fabrica glandular.* Lugd. Batav. 1722. p. 27.

(3) *Mém. de l'Acad. Sc. Par.* 1754. *Hist.* p. 44. *Mém.* p. 187.

(4) *L. c.* p. 221.

(5) *Ueber den Bau und die Verrichtungen der Milz.* Thionville 1817.

les caractères sur lesquels on s'appuyait avant lui, mais il en a cherché d'autres nouveaux, pour mettre mieux en évidence la véritable nature des corpuscules propres de la rate. Ses conclusions sont les suivantes : Les organes en question sont des corpuscules (*vesicules? glandules?*) distincts, membraneux, susceptibles d'une extension plus ou moins grande, et qui reçoivent un grand nombre d'artères et de veines très-déliées, et formant des ramifications pénicillées. Il lui semblait en outre, que les artérioles étaient placées de préférence à la superficie, tandis que les veinules auraient pris leur origine principalement dans l'intérieur (dans la profondeur) des corpuscules.

Les cellules, dont Malpighi avait parlé comme d'une partie constituante essentielle dans la structure de la rate, et dont l'existence avait été, avec raison, revoquée en doute par la plupart des anatomistes, qui lui ont succédé, ces cellules ont paru à Heusinger, être un produit artificiel, obtenu par l'insufflation de l'air dans les corpuscules. Les cellules de Malpighi seraient donc identiques avec les glandules du même anatomiste, et non pas formées dans l'espace intervasculaire ou dans le parenchyme proprement dit, comme on le croit encore généralement. Un dernier mérite de Heusinger consiste en ce qu'il a *démontré* le premier la nature albumineuse du contenu des corpuscules.

Cependant nous verrons plus bas, que Heusinger a, quelques années plus tard, positivement contredit ses résultats de 1817.

C. A. Schmidt (1) a étendu le cercle de nos connaissances sur les corpuscules en question, en publiant plusieurs faits nouveaux et curieux, dont il nous a été possible de constater l'exactitude, quoique nous ne puissions pas partager les idées générales de cet auteur sur la structure de la rate. Les corpuscules, selon lui, possèdent une membrane propre, formée par la gaîne cellulaire qui, dans la rate, accompagne les artères. C'est dans cette membrane qu'il se distribue une infinité de petites artères, dont le tronc commun forme le pédicule sur lequel les corpuscules sont fixés. La membrane crève sous la moindre pression, de sorte que le liquide contenu s'échappe, et qu'il ne reste plus rien en apparence que les petits vaisseaux qui se répandent sur elle. Outre les artères, il existe des veinules dans cette membrane; mais ces veinules semblent prendre leur origine plutôt de l'intérieur des corpuscules, comme Heusinger l'avait déjà dit. La substance albumineuse, contenue dans les corpuscules ou glan-

(1) *Diss. inaug. sistens nonnulla de structura lienis.* Halæ 1819. *Giesker Splenologie* p. 124.

dules est sécrétée par ces organes dont les *veines* et non pas les vaisseaux lymphatiques doivent être reconnues comme les conduits excréteurs.

Fréder. Ruysch. Ch. H. Schmidt.

Après avoir été partisan de l'existence des glandules dans la rate (1), le célèbre anatomiste hollandais crut avoir découvert à l'aide de ses injections, que ces glandules ne sont en réalité autre chose, que les derniers ramuscules des vaisseaux sanguins, qui se terminent en faisceaux ou pénicilles et dont l'aspect glanduleux est dû à ce qu'ils sont réunis entre eux de manière à former des corpuscules mous et arrondis (2).

Cette structure était l'état normal pour Ruysch; mais il admettait en outre que des tubercules peuvent se former dans la rate et prendre l'aspect de glandules (3). Cependant, tout en niant la nature glanduleuse des corpuscules dans la rate humaine, il semble convenir qu'il en est autrement sous ce rapport dans celle des veaux (4).

Quant aux idées que Ruysch professait sur les fonctions de la rate, il nous semble intéressant de faire remarquer, qu'elles s'accordent parfaitement avec les doctrines qui comptent le plus de partisans

(1) *Responsio ad epistol. J. Jac. Campdomerci. Opp. omn. edit. Amstelod.* 1721. Tom. I. *Epist.* IV. p. 6. *Responsio ad Godefridi Bidloi Vindicias.* Tom. I. p. 12.

(2) — Quod glandulas representare videantur, nulla alia est ratio, quam quod dictæ propagines (vasorum sanguineorum) fasciculatim dispositæ sint, et in corpuscula molliora, succosiora atque rotunda redactæ. id quod non solum aliis, verum etiam mihi eo usque imposuit. *Respons. ad J. Jac. Campdomerco. l. c.*—Porro demonstro, corpuscula hæc constare vasculis sanguiferis, quod non fieri poterat tempore Malpighii, qui eos pro meris habuit cisternulis, in quibus pluvia non fit, sed recipitur facta. *Epistol. ad Herm. Boerhaave in Opuscul. de fabrica glandular.* Lugd. Batav. 1722. p. 52. — Acini illi, non sunt folliculi membranacei cavi cum emissario, sed sunt vascula pulposa tenerrima. *Epistol. ad Herm. Boerh.* l. c. p. 72. — Comparez aussi les figures, y relatives, *Ruysch Opera omnia.* Amstelod. 1721. Tom. I. *Epistol.* IV. tab. IV. fig. 1, 2 et 4., ainsi que la rate injectée, représentée dans le Tom. II. *Thesaur. anatom.* VII. tab. I. fig. 1.

(3) *Responsio ad God. Bidloi Vindicias* l. c. p. 10.

(4) *Thesaur. anatom.* IX. n° 55.

aujourd'hui. La négation de la nature glanduleuse des corpuscules ne l'empêchait pas de regarder la rate dans son ensemble comme une glande, servant soit à la perfection et à la sanguification de la lymphe, soit à extraire du sang artériel un fluide particulier destiné à s'ajouter à cette dernière (1).

Quelque peu vraisemblable que fût la nature exclusivement vasculaire de ces corpuscules mous, diffluents au contact, et constamment blancs, et quoiqu'on sût, que Ruysch avait l'habitude de soumettre à une macération de quelques jours ses pièces injectées, ce qu'il appelait les nettoyer, son opinion, comme nous l'avons déjà dit, l'emporta sur celle de Malpighi, grâce à l'appui qu'elle reçut des plus grands anatomistes du siècle passé, tels que Albinus, Haller, Sœmmering (2) et autres encore. Ayant reconnu d'une manière évidente que les corpuscules des reins, dont l'analogie avec ceux de la rate a été établie par Malpighi lui-même, ne sont que des agglomérations de vaisseaux sanguins, on oubliait facilement que les derniers diffèrent des premiers par des caractères essentiels.

Parmi les auteurs du siècle actuel, qui adhèrent à l'opinion de Ruysch, nous devons citer particulièrement *Ch. Hellw Schmidt*, dont la dissertation sur la rate (3) est importante sous plus d'un rapport. Les corpuscules de Malpighi ne consistent, suivant cet auteur, qu'en des faisceaux de petites artères, qui laissent transsuder du sang dans les prétendues cellules de la rate, d'où il arrive ensuite dans les veines. Si les corpuscules paraissent blancs après la mort, cela provient, au dire de Schmidt, de ce que le sang se retire de ces petits vaisseaux, quand la circulation générale se rallentit, ou, pour me servir de ses propres expressions, quand l'afflux du sang vers les corpuscules cesse. On voit que cette explication ne repose pas sur une base solide. Outre, que ces corpuscules blancs sont constamment

(1) Dubitandum non est, quin exaltationi et ulteriori perfectioni lymphæ inserviant, aut succum peculiarem ex arterioso sanguine intra se conficiant, quem lymphæ impertiunt. — Hinc deprehendimus quoque, liene obstructo, tumefacto, indurato, aut alias male constituto sanguinem fieri crassiorem et melancholicum. *Observ. anat. chirurg. LI. Opp. omn. Tom. I. p.* 49.

(2) « Die bisweilen erscheinenden Knoetchen oder Koernchen sind, durch das Vergroesserungsglas bis auf das Genaueste untersucht, nichts als kleine Buendel, rundliche Pinsel oder Quaestchen von Gefaessen. » *Eingeweidelehre.* Frankfurt a. M. 1796. § 42.

(3) *Commentatio de lienis pathologia etc.* Goetting. 1816. § 11 et sqq.

mieux développés sur le vivant qu'après la mort, ce dont nous nous sommes assuré par nos expériences, il resterait à expliquer pourquoi la même cause ne produit pas, dans d'autres tissus et organes, les mêmes effets.

Dupuytren et Assolant.

La description qu'Assolant a donnée de ces corpuscules (1) d'après les indications de Dupuytren, est beaucoup plus détaillée que toutes celles qui avaient été publiées avant lui. On lui doit aussi l'indication de plusieurs moyens nouveaux pour constater la présence des corpuscules dans une rate où ils ne peuvent pas être aperçus à l'œil nu.

Cependant il est à regretter qu'il n'ait pas formulé nettement son opinion sur la nature de ces petits organes, et qu'il se soit glissé même des contradictions dans son travail, qui porte sous tous les autres rapports le cachet d'une consciencieuse exactitude.

Assolant se prononce à la fois contre l'opinion de Malpighi et contre celle de Ruysch ; il nie la présence d'un liquide à l'intérieur de ces corpuscules qu'il considère en conséquence comme *solides* tout en leur attribuant une consistance très-faible. Il insiste sur leur adhérence au tissu rouge de la rate, qui est si forte, dit-il, qu'on ne les enlève jamais en entier ni tout-à-fait isolés (2). S'ils sont revêtus d'une membrane propre, elle est si fine, selon lui, qu'il lui a été toujours impossible de la voir.

Quant aux rapports que ces corpuscules auraient avec des vaisseaux sanguins, il dit avoir toujours rencontré de ces derniers, mais en moins grand nombre que ceux qui parcourent le reste du tissu de la rate. Dans un autre endroit (3) il affirme, qu'il s'est assuré que les vaisseaux lymphatiques ne se réunissent pas dans les corpuscules pour s'y distribuer comme dans les glandes lymphatiques. La nature organique de ces corpuscules solides serait tout-à-fait inconnue.

Et cependant, quoiqu'il eut dit d'abord : 1° que leur nature organique est tout-à-fait inconnue, 2° qu'ils sont des petits corps solides et non pas creux, et 3° qu'ils n'ont pas de rapports avec les vaisseaux lymphatiques, on trouve plus bas (4) le passage suivant : « *Quelle est la nature intime de ces corpuscules?... Quels sont leurs usages? Ne servent-ils pas à opérer une sécrétion dont le produit est absorbé par les lymphatiques?...* »

(1) *Recherches sur la rate.* Paris an X. p. 41.
(2) *l. c.* p. 43.
(3) *l. c.* p. 40.
(4) *l. c.* p. 80.

William Hewson et Magnus Falconar.

William Hewson, avait commencé peu de temps avant sa mort, à publier les expériences qu'il avait faites sur la formation des globules du sang et sur la structure et les usages des glandes lymphatiques, du thymus et de la rate. C'est son ami Falconar qui a achevé et publié l'ouvrage (1), et qui a décrit spécialement les expériences auxquelles il avait assisté.

Selon Hewson, il existe dans toutes les glandes lymphatiques, des cellules microscopiques, d'où une certaine classe de vaisseaux lymphatiques prend son origine. Ces derniers, qu'il ne faut pas confondre avec les autres lymphatiques qui ne font que traverser les glandes, servent de canaux excréteurs pour la lymphe sécrétée dans les cellules (2).

De même, il existe dans la rate, des cellules si petites qu'elles ne peuvent être bien aperçues qu'à l'aide d'une loupe, et qui, par leur forme aussi, sont analogues à celles des glandes lymphatiques.

Les derniers ramuscules des artères et des veines forment le plus beau réseau à la surface de chaque cellule, et chacune de ces dernières est en outre en rapport avec des vaisseaux lymphatiques qui lui servent de conduits excréteurs (3).

Il n'est pas permis de douter que ce que Hewson appelle *cellules* ne soit réellement ce que Malpighi avait appelé *glandules* et ce qu'on désigne plus communément sous le nom de *corpuscules*. Car l'existence de *cellules* proprement dites, telles que Malpighi les décrit, a été, comme de raison, positivement niée par le physiologiste anglais.

Les glandes lymphatiques, le thymus, la rate et spécialement les petites cellules qu'on trouve dans chacun de ces organes, servent à former les globules du sang.

Le noyau de ces globules est formé dans les cellules des glandes lymphatiques et dans celles du thymus, qui n'est sous tous les rap-

(1) *Guilielmi Hewsoni Opus posth. sive rubrarum sanguinis particularum, et fabricæ ususque glandul. lymphat. thymi et lienis descriptio ; edid. Magn. Falconar. Latine vertit J. Th. van de Wynpersse.* Lugdun. Batav. 1785. — La première édition anglaise : *Experimental inquiries* etc. a paru à Londres en 1776 ; la deuxième en 1799.

(2) *L. c.* p. 7 et 9, sect. 43 et 44.

(3) *L. c.* p. 87, 88, sect. 65 et 66.

ports qu'une glande lymphatique d'une grosseur extraordinaire (1). Conduits d'abord, par les lymphatiques, dans le torrent de la circulation, ces noyaux ou particules centrales comme les appelle Hewson, sont portés ensuite par l'artère splénique vers la rate où ils sont déposés dans les cellules. Les artères qui forment un réseau autour des cellules, sécrètent alors une masse albumineuse rouge, que nous appellerions maintenant de l'hématine, laquelle en s'appliquant sur les noyaux, devient l'enveloppe ou la partie externe des globules du sang (2).

Dans des cas exceptionels, et pour ainsi dire, *vicario modo*, la fonction des cellules de la rate peut être faite par les vaisseaux lymphatiques eux-mêmes, sur les parois desquels aboutissent également des artères. Ce fait servait à Hewson et Falconar à expliquer, comment dans les maladies de la rate, et dans les cas d'extirpation de cet organe, la formation des globules du sang n'est pas rendue impossible.

Tiedemann et Gmelin.

Bien que ces deux auteurs célèbres, dans leur mémoire couronné en 1821 par l'institut de France (3) ne parlent qu'en passant, des corpuscules de la rate et qu'ils ne se soient pas livrés à des recherches anatomiques sur ce point, nous devons cependant exposer ici leurs idées générales sur la fonction de la rate, parce qu'elles impliquent en réalité une manière de voir toute particulière, touchant ses corpuscules.

(1) *L. c.* p. 99, sect. 85 et p. 105.

(2) Particulæ centrales — quum huc (in lienem) delatæ sunt, lieni facultas sit illas a reliquis sanguinis partibus separandi, et in cellulis hujus glandulæ deponendi, ubi arteriæ, forma reticuli per cellularum parietes diffusæ, a sanguine *partem vesicularem* (l'enveloppe) secernunt, quodque, ita perfecte formatæ, a vasis lymphaticis. e cellulis enascentibus, resorbeantur, indeque ad ductum thoracicum, et hac via in vasa sanguifera ducantur. *L. c.* p. 108, sect. 98. Je tenais à transcrire ici le texte latin, parce qu'il me semble que parmi le grand nombre d'auteurs qui citent la théorie de W. Hewson, il y en a très-peu qui la connaissent de première main.

(3) *Versuche über die Wege auf welchen Substanzen aus dem Magen u. Darmkanal ins Blutgelangen etc.* Heidelberg. 1820. — Traduit en français par Heller : *Recherches sur la route que prennent diverses substances pour passer de l'estomac et du canal intestinal dans le sang, etc.* Paris. 1821.

La rate, au dire de Tiedemann et Gmelin, est un viscère qui est en rapport très-intime avec le système absorbant ; elle est destinée à séparer du sang artériel un fluide coagulable, qui est pris ensuite par les vaisseaux absorbants et porté dans le canal thoracique; et la sécrétion de ce fluide ainsi que son introduction dans le canal en question a pour but d'assimiler le chyle à la masse du sang (1).

Quant à l'appareil organique qui, dans la rate, servirait à cette sécrétion, l'opinion des deux célèbres professeurs n'était pas fixée sur ce point. Ou il se trouve, disent-ils, dans la substance de la rate des corps glandiformes particuliers, et de petites cellules ou aréoles, que plusieurs anatomistes disent avoir remarquées, dans lesquels cette lymphe colorée est séparée du sang et prise ensuite par les vaisseaux lymphatiques ; ou il se trouve une communication immédiate entre les plus fins rameaux capillaires des artères de la rate et ceux des vaisseaux absorbants, et c'est de cette manière que la partie la plus substantielle du sang artériel passe dans les vaisseaux lymphatiques (2). Après avoir posé cette alternative, ils semblent pencher plutôt vers le second que vers le premier de ces cas, et ce que les anatomistes désignent sous le nom de *corpuscules*, de *glandules*, *cellules*, ou *vésicules*, ne serait pour eux que des vaisseaux lymphatiques gonflés, dans certaines circonstances, par la grande quantité de lymphe qu'ils contiennent.

La doctrine physiologique, comme on le voit, se rapproche donc de bien près de celle de Hewson, avec laquelle on l'avait même, quoique à tort, confondue quelquefois. Pour Tiedemann et Gmelin aussi, c'est la matière colorante rouge que la rate fournit au chyle. Mais leur opinion diffère essentiellement de celle du physiologiste anglais, d'abord en ce qu'ils n'admettent point un fait réellement inadmissible, savoir que les noyaux des globules du sang sont déposés par les artères, dans les cellules de la rate pour y recevoir leur enveloppe, ensuite, en ce que ces cellules ne sont pas, pour eux, l'origine d'une classe de vaisseaux lymphatiques, mais uniquement des parties gonflées accidentellement, sur le trajet de ces derniers vaisseaux.

Ev. Home en 1808.

Nous reviendrons plus tard sur les idées de ce célèbre physiologiste, touchant le gonflement, dans certaines circonstances, des corpuscules

(1) *Rech. sur la route, etc.* p. 81.
(2) *L. c.* p. 87.

de la rate, fait dont la première observation lui est due. Bien que ces idées aient été abandonnées par l'auteur lui-même à la suite d'expériences nouvelles qu'il avait faites, nous devons en prendre acte ici, d'abord parce qu'elles sont intéressantes en elles-mêmes, ensuite par ce qu'elles ont été soutenues plus tard par plusieurs autres physiologistes.

Ev. Home regardait en 1808 (1) les corpuscules de la rate, comme des *cellules* communiquant avec des vaisseaux qui viennent de l'estomac. Les liquides ingérés dans ce dernier organe traverseraient la rate et notamment ces cellules pour arriver vers la vessie urinaire. Afin d'étudier la structure anatomique de ces cellules, Ev. Home conjointement avec Brodie, injecta des rates de veau, de cheval et de cochon; il trouva que les cellules contiennent dans leurs parois un grand nombre de petits ramuscules artériels, mais *aucune veine.* Quand les cellules se trouvaient à l'état de contraction, et que, dans ce cas, l'injection avait pénétré jusque dans les plus petits ramuscules, *toute apparence de cellules avait disparu.*

Ev. Home en 1811.

L'opinion que Ev. Home exprima, dans un second mémoire, publié en 1811 (2), tient pour ainsi dire, le milieu entre celle de Malpighi et celle de Hewson.

Les corpuscules sont des *cellules*, remplies d'un fluide, dont la quantité varie selon l'état des organes digestifs. Ce fluide est *sécrété* par les artères qui se répandent sur la paroi des cellules. Mais comme l'auteur avait nié la présence des veines sur leurs parois, il s'écarte de la façon de voir de Malpighi, en ce qu'il prend les *vaisseaux lymphatiques* pour les conduits excréteurs du fluide sécrété par les cellules. Il diffère de Hewson en ce qu'il considère comme une véritable secrétion ce qui se passe dans les cellules, et non pas comme une fonction de sanguification.

C. F. Heusinger en 1823.

Nous avons dit plus haut, que Heusinger avait d'abord adopté une opinion plus ou moins conforme à celle de Malpighi. Mais dans ses *Suppléments au mémoire sur l'inflammation et sur l'hypertrophie de la*

(1) *Philos. Transact. forthe year* 1808, p. 45. *Biblioth. Brittan.* Vol. 46 p. 57.

(1) *Philos. Transact. for the year* 1811, p. I. p. 165.

rate, 1825 (1). Il regarde la nature vésiculeuse des corpuscules, dans le vivant comme une suite d'altérations pathologiques (2), et dans une rate soumise à la préparation, comme produite artificiellement par l'insufflation de l'air.

Mais à l'état normal, la chose a lieu, suivant Heusinger, de la manière suivante :

Le parenchyme de la rate se compose, outre les vaisseaux lymphatiques et les veines, d'artères qui se ramifient en houppes, et qui se résolvent à la fin, en de petites masses rondes formées d'un tissu cellulaire amorphe (Bildungsgewebe). Ces masses, connues sous le nom de corpuscules ou glandules de la rate ne sont composées en réalité, que d'un simple tissu cellulaire. Si l'on souffle de l'air dans les vaisseaux, il transforme ces masses en vésicules, de la même manière, que l'air peut transformer le tissu cellulaire dans toutes les autres parties du corps, en une masse vésiculeuse ou écumeuse.

Bien peu de physiologistes accepteront ces opinions, qui datent d'une époque où l'on avait en général de fausses idées sur la structure du tissu cellulaire, et sur la terminaison des artères dans ce tissu. Au reste, Giesker a refuté cette seconde opinion de Heusinger, par des arguments péremptoires, ce qui nous dispense de nous y arrêter plus longtemps.

J. Mueller.

Le célèbre physiologiste de Berlin a déposé les résultats de ses recherches sur ce sujet, dans une notice insérée dans ses archives de physiologie (3).

Suivant M. J. Mueller il y aurait une distinction à faire entre les *véritables corpuscules de Malpighi*, qui ne se trouvent que dans quelques mammifères herbivores, tels que le bœuf, le mouton, la chèvre, le hérisson et la taupe, et *d'autres tout-à-fait dissemblables*

(1) *Nachtræge zu den Betrachtungen und Erfahrungen über die Entzündung und Vergroesserung der Milz.* Eisenach, 1823. — N'ayant pas pu me procurer cet ouvrage, j'ai dû me servir de l'extrait, qui en a été donné par M. Giesker dans sa splenologie.

(2) « Jch habe nur zu bemerken, dass die Haut der weissen Koerperchen *immer ein Produkt der Krankheit ist.* » *Nachtræge*, etc., p. 73 ; Suivant Giesker, *l. c.*

(3) *Ueber die Structur der eigenthümlichen Koerperchen in der Milz einiger pflanzenfressenden Saeugethiere. Arch. f. Anat. u. Physiol.* 1834, p. 80, tab. 1.

qu'on rencontre quelquefois chez d'autres animaux et chez l'homme lui-même, mais très-rarement. M. J. Mueller ne traite que des premiers. Suivant lui, ce sont de petits corps arrondis, blancs, de la grandeur de $\frac{1}{5}$-$\frac{1}{2}$ millimètre, d'une consistance assez forte pour pouvoir résister à la pression jusqu'à un certain point, et conserver leur forme, même lorsqu'on les manie doucement entre les doigts. Ces corpuscules sont unis les uns aux autres par des filaments, de manière, qu'on peut, par la macération, en obtenir des faisceaux semblables aux grappes de raisins (1). Aucun de ces corpuscules n'est isolé; chacun a des prolongements dans une ou deux directions, et si l'on poursuit les ramuscules sur lesquels les corpuscules sont fixés, on arrive infailliblement jusqu'aux troncs artériels de la rate (2). Des injections fines, poussées dans les artères, lui ont prouvé que chaque petite artériole est logée dans une gaîne blanche, qui l'accompagne jusqu'à ses dernières ramifications. *Les corpuscules ne sont que des excroissances de cette gaîne blanche des ramuscules artériels* (3), et quant à leur forme, une espèce de vésicules à parois assez épaisses, renfermant dans leur intérieur un liquide granuleux (4). *Les artères ne se terminent jamais sur les corpuscules.* Elles ne font que traverser leurs parois sans leur donner des ramuscules, et toutes sans exception se terminent dans la substance pulpeuse rouge qui environne les corpuscules.

M. Mueller n'attribue pas une grande importance physiologique à ces petits organes, par la raison qu'il considère leur présence comme bornée à un petit nombre d'animaux. Seulement pour forme d'hypothèse, il dit, que le suc qu'ils contiennent pourrait avoir de l'influence sur les ramuscules artériels qui les traversent et sur le contenu de ces derniers.

Quant aux autres corpuscules, qu'on trouve dans la rate des chiens, des chats, et quelquefois chez l'homme, il dit n'avoir pas encore pu se rendre compte de leur nature.

Ad. Schwager-Bardeleben.

Une opinion particulière est émise dans la dissertation inaugurale de cet auteur (5), qui a fait ses observations sous la direction de M. Bischoff, à Heidelberg.

(1) Voir les figures que l'auteur a jointes à sa notice.
(2) *L. c.*, p. 85.
(3) *L. c.*, p. 87.
(4) *L. c.*, p. 88.
(5) *Observationes microscop. de glandularum ductu excretorio carentium structura*, etc. Berolini, 1841.

Si on examine la masse pulpeuse rouge de la rate, sous le microscope, on trouve qu'elle consiste dans tous les animaux en un tissu fibreux, opaque, qui renferme des vaisseaux sanguins, et c'est ce tissu fibro-vasculaire, qui, suivant Bardeleben, est la base de la structure de la rate. Il existe dans ce tissu des vacuoles ou cellules microscopiques plus transparentes et remplies de granules. Le nombre de ces cellules est si considérable, que leur masse forme le double du tissu fibreux dans lequel elles sont logées.

Les corpuscules blancs de Malpighi, au dire de Bardeleben, ne diffèrent de ces cellules microscopiques, que par la grandeur. Car les uns et les autres contiennent des granules, et tous deux sont entourés d'un réseau de vaisseaux sanguins.

Quelque faiblement appuyée que paraisse cette opinion, pour ce qui regarde les corpuscules de Malpighi, et quelque peu disposés que nous soyons à l'admettre, elle mérite cependant d'être sérieusement examinée.

—

Avant de faire un choix parmi les hypothèses que je viens de passer en revue, il existe un grand nombre de questions qu'il est nécessaire d'examiner. Celle qui me paraît mériter le premier rang est relative aux changements considérables dans le volume qui s'opèrent, suivant les circonstances, dans les corpuscules de la rate. Aussi est-ce là le point principal que je me suis proposé de traiter dans ce premier mémoire.

En examinant un grand nombre de rates de chiens, je fus frappé des grandes différences qu'elles offraient individuellement sous le rapport de la présence et du degré de développement des corpuscules.

Tantôt toute la rate était parsemée de corpuscules visibles à l'œil nu, et en tout semblables à ceux qu'on trouve constamment dans le même organe chez les ruminants. Tantôt je n'en rencontrais que quelques-uns, de 6 à 10, dont chacun avait $\frac{3}{4}$ ou 1 ligne de diamètre, tandis que dans tout le reste de la substance il m'était impossible d'en trouver.

Parfois ces petits corps semblaient manquer complètement, et je ne parvenais à les découvrir qu'après une préparation préalable et à l'aide d'une loupe assez forte. Dans certains cas, enfin, rien ne pouvait me démontrer leur existence, ni le lavage, ni l'alcool, ni les acides, ni l'emploi du microscope.

Me rappelant alors que dans les rates de veaux, dont je m'étais servi en premier lieu, pour étudier la nature de ces petits organes,

leur grandeur, et surtout la quantité de liquide qu'ils renfermaient, n'étaient nullement les mêmes; bien qu'ici ils ne manquassent jamais absolument, j'ai cru voir dans ces variations l'effet d'un acte physiologique, qu'il importait peut-être d'étudier avec soin.

En méditant sur ce sujet, j'ai dû me rappeler en outre certaines opinions qui le concernent.

Je veux parler surtout de celle émise par *Everard Home* (1), et devenue célèbre parmi les hypothèses sur les fonctions de la rate. En examinant cet organe après qu'une quantité extraordinaire de liquides avait été introduite dans l'estomac, le célèbre physiologiste anglais a trouvé que les corpuscules en question étaient gonflés et qu'ils présentaient de véritables *cellules* bien visibles, qui laissaient échapper un fluide quand on y pratiquait une piqûre. Il lui a paru alors, que le volume que prennent les corpuscules ou cellules est en rapport avec le degré d'extension de l'estomac. Ce fait a été appliqué par lui à sa théorie sur les voies par lesquelles les boissons arrivent de l'estomac dans la vessie urinaire, théorie d'après laquelle ce passage s'effectuerait par l'intermédiaire de la rate, et la cause qui fait gonfler les corpuscules, seraient les liquides qui y arriveraient de l'estomac par l'intermédiaire des vaisseaux courts.

Bien qu'Everard Home ait abandonné, dans un autre mémoire publié trois ans plus tard (2), son opinion sur la nature du liquide contenu dans les cellules, nous tenons cependant à constater, que le fait de la variation du volume des corpuscules dans certaines circonstances, a déjà été observé en 1808 par ce physiologiste.

C. F. Heusinger (3), qui a si bien étudié tout ce qui a rapport à la rate, a constaté d'une manière décisive, que les corpuscules sont capables d'une *extension* plus ou moins forte. Comme Ev. Home, il avait observé aussi, que ces corpuscules sont toujours plus grands et plus distincts, quand l'animal a pris une grande quantité de liquides, peu de temps avant sa mort. Mais, de même qu'Ev. Home, il a nié,

(1) *On the structure and uses of the spleen. Philos. transact. for the year* 1808, p. 45. *Further experim. l. c.* p. 133. — Ce mémoire, traduit en français, a été inséré dans la *Bibliothèque britannique*, vol. 46, p. 57, et en allemand dans *Reil u. Authenrieth's Archiv für die Physiologie*, IX, 1809, p. 525.

(2) *Experiments*, etc., *in Philos. transact. for the year* 1811. P. I. p. 163. *Reil und Authenrieth's Arch. f. d. Physiologie*, XII, 1815, p. 125.

(3) *Ueber den Bau und die Verrichtungen der Milz.* Thionville, 1817.

quelques années plus tard (1), presque tous ses résultats de 1817, de sorte que ce fait important a été de nouveau perdu pour la science. Les corpuscules, qui, en 1817, étaient de véritables vésicules, capables d'extension, n'étaient plus, en 1823, pour Heusinger, que des amas d'un tissu cellulaire amorphe, ou des tubercules pathologiques, ou une espèce d'hydatides, ou enfin rien du tout.

Ce gonflement des corpuscules, qui a lieu après que l'animal a pris des boissons, a été, au reste, confirmé de nouveau par C. A. Schmidt (2), J. F. Meckel (3) et par A. Berthold (4).

Une autre opinion, qui pourrait peut-être servir à expliquer le fait, qui nous occupe, est celle de Tiedemann et Gmelin (5). Au dire des célèbres professeurs de Heidelberg, la rate est traversée par une infinité de vaisseaux lymphatiques qui s'y mettent en rapport intime et fonctionel avec les artères; bien plus, les artères passeraient immédiatement dans les vaisseaux lymphatiques. Nos corpuscules ou les glandules de Malpighi ne seraient autre chose que des vaisseaux lymphatiques, qui, lorsque l'animal a pris des aliments avec abondance, seraient gorgés d'une lymphe rougeâtre.

D'autres auteurs, p. e. Giesker dans son excellente monographie (6), sans adopter expressément l'opinion de Tiedemann et Gmelin, ont cependant observé, que c'est la digestion qui, entre autres circonstances, exerce une grande influence sur l'état de ces corpuscules. Car ils conseillent à ceux qui veulent les étudier dans la rate humaine, de choisir des sujets qu'une mort subite a atteints peu de temps après avoir mangé et pendant la digestion. Cependant, Giesker explique le développement plus considérable de ces corpuscules dans ce moment, d'une manière générale et pour ainsi dire *à priori*, par la connexion qui existe entre la rate d'une part et le système digestif de l'autre.

(1) *Nachtraege zu den Betrachtungen und Erfahrungen über die Entzündung und Vergroesserung der Milz.* Eisenach, 1823.

(2) Suivant *Giesker Splenologie*, p. 126.

(3) *Handbuch der menschlichen Anatomie. IV. Halle*, 1820, p. 368.

(4) *Lehrbuch der Physiologie des Menschen und der Thiere.* II. Goettingen, 1829, § 428.

(5) *Versuche über die Wege, auf welchen Substanzen aus dem Magen und Darmkanal ins Blut gelangen*, etc. Heidelberg, 1820.

(6) *Anatomisch-physiolog. Untersuch. über die Milz des Menschen.* Zurich, 1835, S. 159.

Enfin, le fait en question recevrait-il son explication par l'engorgement général de la rate qui coïncide, au dire de Leuret et Lassaigne (1) avec la présence du chyme dans le tube digestif, pendant le temps de l'absorption chyleuse?

Il m'a semblé que le fait lui-même n'a pas encore été suffisamment étudié, et que plusieurs circonstances doivent d'abord être appréciées par l'observation, avant qu'il ne nous soit permis de songer à l'expliquer.

C'est dans le but exclusif de m'éclairer sur le fait, et sans aucune prévention théorique, que j'ai entrepris les expériences suivantes, dont les unes tendent à éclaircir la nature même des corpuscules de la rate, les autres, à démontrer de quelles circonstances dépend leur gonflement.

Expérience 1. (2). Après avoir étourdi par un coup de marteau appliqué sur la tête, un chien de moyenne taille, je lui ouvris l'abdomen, par une incision parallèle à la dernière côte, et je sortis la rate par la plaie que je fermai ensuite au moyen de quelques sutures pour empêcher le retour de la rate dans la cavité abdominale. Les branches de l'artère splénique battaient avec force, celles de la veine, au contraire, paraissaient affaissées. Je fis ensuite une profonde incision longitudinale dans la substance de la rate. Le sang jaillit par saccades de grosses branches artérielles. Mais dans les parties plus éloignées de la scissure

(1) *Recherches physiol. et chim. pour servir à l'histoire de la digestion.* Paris, 1825, p. 88. Je saisis l'occasion de faire observer ici, que mes propres recherches me font douter, si un pareil engorgement a réellement lieu pendant la digestion. S'il y a engorgement, il me semble avoir lieu plutôt après la digestion, ce qui serait d'accord avec ce que *Lieutaud* (*Hist. de l'Acad. roy. Sc. Par.* 1738, p. 39), *Malacarne, Moreschi* et autres ont remarqué, savoir que la rate est plus grosse dans l'état de vacuité de l'estomac, et qu'elle diminue de volume pendant la digestion. — M. Fossion, jeune médecin distingué de notre ville, s'appuie sur ce fait, dans un mémoire adressé à l'Académie des sciences de Bruxelles, pour démontrer que la rate sert de *diverticulum* au sang nécessaire aux actes de la digestion.

(2) Je dois faire observer, que quelques unes des expériences ont été faites en présence des personnes qui suivent mon cours de Physiologie à l'université de Liége.

lienale le sang suintait d'une manière continue, et couvrait entièrement le tissu. Lorsqu'on essuyait le sang avec une éponge, il apparaissait une multitude de corpuscules blancs, très-apparents, (1) sphériques ou allongés, la plupart à bords circonscrits, quelques-uns diffluants avec le reste du tissu, ou envoyant des prolongements dans une ou deux directions. Ces corpuscules ne tardaient pas à se couvrir de nouveau d'une couche de sang. Mais plus on passait l'éponge sur la plaie, moins ils devenaient distincts, et à la fin le plus grand nombre avaient entièrement disparu.

Une nouvelle incision à la distance de 2 lignes de la première mit encore des corpuscules en évidence, mais moins grands et moins nombreux, et qui disparaissaient après que l'éponge y avait été appliquée pour la deuxième fois. Le même résultat eut lieu pour trois incisions qui furent faites ensuite (2).

Enfin la rate fut coupée, et des tranches de la substance furent lavées avec soin; d'autres, après un simple lavage furent trempées dans de l'alcool concentré, sans qu'il fut possible de faire reparaître les corpuscules. On n'en trouvait, après ces préparations que quelques-uns très-petits, qui se montraient à de grandes distances les uns des autres.

Etait-ce la pression de l'éponge qui faisait disparaître les corpuscules en déchirant leurs parois ? ou en refoulant dans les vaisseaux le liquide qu'ils contenaient ?

Cependant comme c'était non-seulement les corpuscules mis à découvert, mais encore ceux placés dans la profondeur du tissu, qui diminuaient de volume, il est peu probable, que le déchirement de leurs parois fut cause de leur disparution.

Le liquide doit s'être échappé par des vaisseaux avec lesquels les corpuscules sont en rapport et comme les recherches anatomiques ont prouvé, que ni les artères ni les veines ne s'ouvrent librement dans les corpuscules, il ne reste qu'à penser, que ce sont des vaisseaux lymphatiques qui sont en continuité avec ces petits organes.

Or, comme non-seulement les corpuscules existants dans la plaie même ont diminué de volume, mais encore ceux qui se trouvaient dans la profondeur du tissu, et comme, après quatre incisions et

(1) Jamais je n'ai vu les corpuscules aussi distincts sur le cadavre, que cela a lieu sur le vivant.

(2) Il est remarquable, qu'après la mort de l'animal, on observe le fait contraire. Le lavage et la macération, c'est-à-dire l'évacuation des vaisseaux sanguins, rendent les corpuscules plus apparents.

un certain laps de temps, tous s'étaient vidés complètement, (ce qui est prouvé par le fait qu'on ne pouvait plus les faire ressortir ni par le lavage ni par l'alcool) on doit en conclure, que l'écoulement du liquide contenu dans leur intérieur a eu lieu par suite de la section des lymphatiques qui leur servent de vaisseaux soit afférents, soit efférents, et non pas uniquement par suite de la pression exercée par l'éponge; en un mot, que cet écoulement a la même cause que celui des vaisseaux sanguins.

Cette expérience a été répétée deux fois avec quelques modifications et a donné les mêmes résultats. Dans une troisième, les résultats furent moins nets, attendu qu'au moment même de l'incision dans la substance de la rate, on ne pouvait déjà apercevoir qu'un nombre très-restreint de corpuscules.

L'écoulement du liquide de ces derniers, après une incision pratiquée dans la substance de la rate, est une circonstance fâcheuse dans les expériences sur cet organe. Il empêche d'observer l'état primitif des corpuscules avant qu'un changement y soit fait par l'expérience même.

Expérience 2. Sur un chien la rate fut tirée de l'abdomen. Des petites incisions furent faites ensuite dans les veines à 2-4 lignes de distance de la scissure de la rate. Le sang qui s'écoulait était peu abondant, mais formait un jet continu. Malgré cela, aucun affaissement de la rate ne se faisait remarquer; sa substance paraissait en outre conserver la consistance ordinaire. Après que l'organe eut été divisé en deux moitiés par une incision longitudinale, il apparut un assez grand nombre de corpuscules blancs et d'une grandeur moyenne. La plaie ne tarda pas à se couvrir d'une nappe de sang.

Expérience 3. Les rameaux principaux de l'artère splénique furent liés sur un autre chien. Dix minutes après l'opération on remarqua un affaissement, du reste peu considérable, de la rate; sa substance paraissait opposer moins de résistance à la pression des doigts. Les corpuscules étaient peu nombreux mais il y en avait dont le diamètre excédait 1 ligne. Du sang coagulé existait dans les troncs veineux (1).

Expérience 4. Je choisis la rate d'un veau, dans laquelle les corpuscules étaient des plus distincts. Je poussai avec une grande seringue à injection, de l'eau dans l'artère splénique et j'observai les

(1) L'ancienne erreur de *Senac*, *Roloff*, *Hartmann*, *Haller*, et autres sur la non-coagulabilité du sang contenu dans la veine splénique, a été déjà refutée par Tiedemann et Gmelin (*Rech. sur la route que prennent diverses substances*, etc. p. 65).

corpuscules qui avaient été mis préalablement à découvert. Le moindre gonflement de ces corpuscules n'a pu être remarqué.

La même expérience faite sur la rate d'un chien où, comme on sait, la substance des corpuscules est beaucoup plus molle et diffluente, ne donna aucun résultat. L'eau s'échappait par les petites artérioles coupées, et bientôt on ne pouvait plus distinguer de corpuscules.

Quand j'injectais des rates de chien, avec de la colle de Flandre et du vermillon, les corpuscules disparaissaient également partout où la masse à injection avait pénétré assez en avant (1). Je donnerai dans la seconde partie de ce mémoire, la description d'une préparation que je possède, et qui servira à démontrer le mode de terminaison des artères sur les corpuscules.

Les essais que j'ai faits d'injecter par les veines, ne m'ont pas réussi jusqu'à présent. Il m'a été impossible également de pousser la masse à injection des artères dans les veines, chose que quelques anatomistes disent avoir obtenue avec facilité.

Expérience 5. Conformément au conseil que Ruysch (2) a donné pour mettre en évidence les vaisseaux lymphatiques de la rate, je liai sur un chien, qui venait d'être tué, tous les vaisseaux de la scissure, artères et veines avec soin, afin de comprendre dans la ligature tous les vaisseaux lymphatiques qui sortent de cet organe. Ayant enlevé, un quart d'heure après, une grande partie de la tunique séreuse qui le revêt, je trouvai les vaisseaux lymphatiques du plan superficiel, gorgés d'une lymphe laiteuse, et opaque, bien qu'il s'en fallut de beaucoup, que ces vaisseaux fussent aussi développés, qu'on a l'occasion de les voir ailleurs, p. e. sur une rate de ruminants. Cependant on ne pouvait pas se méprendre sur l'existence d'un gonflement extraordinaire, car toutes les fois que sur une rate de chien, je n'ai pas lié les vaisseaux sortants de la scissure, il m'a été impossible

(1) Je n'ignore pas, qu'on pourrait m'opposer les résultats de plusieurs anatomistes d'un grand renom. *Th. Bartholin*, *Nuck*, *Tiedemann* et autres ont rempli les vaisseaux lymphatiques de la rate, en injectant par l'artère splénique. *Cowper*, *Morgagni* et *Monro* ont poussé de l'air et de l'eau à travers les veines jusques dans les vaisseaux lymphatiques. Quoique mes essais portent sur les corpuscules et non pas directement sur les vaisseaux lymphatiques, je n'aurais pas osé publier mes résultats, s'ils n'avaient pas été constamment les mêmes.

(2) *Dilucid. Valvul. in Vasis lymphat.* Cap. III. Amstelod. 1720, p. 12.

de bien voir les lymphatiques, quel qu'ait été l'état de l'animal immédiatement avant sa mort.

Une incision faite dans la substance même de la rate, fit paraître une infinité de corpuscules blancs, dispersés dans tout le tissu, et tous extraordinairement gonflés; la plupart avaient $\frac{1}{2}$ - $\frac{3}{4}$ ligne de diamètre, et ça et là on en voyait même de plus gros, ayant jusqu'à 1 ligne de diamètre. La plupart avaient des bords bien distincts et tranchés; cependant si on les soulevait avec la pointe d'un scalpel, on voyait qu'ils adhéraient au reste de la substance par des filaments *blancs* (des vaisseaux lymphatiques?) qu'il était parfois possible de poursuivre assez loin. Lorsque par hasard des petites artérioles ou veinules étaient tiraillées et soulevées en même temps qu'un corpuscule, il était possible de reconnaître que le dernier n'était pas immédiatement en continuité avec elles, c'est-à-dire, qu'il existait entre le corpuscule et le petit vaisseau sanguin, une masse blanche et filamenteuse.

Sur un très-petit nombre on voyait, sans avoir soulevé les corpuscules, des prolongements assez épais sortir de ces derniers. J'appliquai très-légèrement le dos du scalpel sur un prolongement de ce genre pour le racler dans la direction opposée à celle du corpuscule. La couleur laiteuse qu'avait dans l'origine le prolongement, disparut bientôt, et il ne resta que l'apparence d'un filament transparent. Était-ce la lymphe qui avait été refoulée vers les vaisseaux lymphatiques efférents? Souvent j'ai essayé de presser dans des sens divers les corpuscules les plus grands, afin de refouler le liquide qu'ils contenaient vers les vaisseaux avec lesquels ils me semblaient être en rapport. Mais je n'ai obtenu que des demi-résultats. Si quelquefois je croyais avoir vidé par la pression un corpuscule, je ne découvrais pas les parties qui avaient reçu le liquide; et le plus souvent le corpuscule se crevait par la pression, ses parois étant trop molles et gélatineuses.

Ayant répété cette expérience une troisième fois, je fus étonné de voir qu'un quart d'heure après la ligature des vaisseaux, ni les lymphatiques, ni les corpuscules n'étaient gonflés. Il y avait ça et là des corpuscules assez grands mais isolés et plus difficiles que de coutume à reconnaître, attendu que leur contenu était plutôt rouge que blanc. Ce fait exceptionel ne m'a été expliqué que par les expériences, auxquelles je me suis livré depuis, et qui prouvent, que la quantité de lymphe contenue dans les vaisseaux et dans les corpuscules de la rate, dépend de la digestion, ou plutôt de l'absorption chyleuse.

Expérience 6. Sur la rate d'un jeune chien je liai deux branches seulement de l'artère splénique avec les veines qui les accompagnaient.

Un quart d'heure après je divisai la rate en deux moitiés longitudinales. Il était facile de voir une différence notable entre la partie dont les vaisseaux avaient été liés, et le reste de la substance (1). Les corpuscules de cette dernière étaient peu développés et peu nombreux en apparence, tandis que ceux de la première étaient gorgés de liquide, et excessivement nombreux.

Ce résultat m'a paru au premier moment très-important pour mes recherches ultérieures. Je croyais avoir trouvé un moyen de constater *dans une même rate*, l'état des corpuscules avant et *après* une expérience quelconque ou d'isoler une partie de la rate pour la soustraire aux effets d'une expérience. C'eut été le seul moyen d'arriver à des conclusions directes et inattaquables; mais bientôt, en voulant essayer ce moyen, je me convainquis, que ce résultat dépend en outre de trop de circonstances accessoires, pour pouvoir servir de moyen d'expérimentation. Quand une incision a été faite dans le tissu de la rate, les corpuscules ne se gonflent plus ni dans la partie dont les vaisseaux avaient été liés, ni dans celle dont les communications sont restées libres. Dans d'autres cas, quand il y a très-peu de lymphe dans la rate, p. e. hors de la digestion, en supposant même que les corpuscules soient bien visibles, les lymphatiques et les vésicules ne se gonflent pas, ou du moins le gonflement est trop faible pour qu'on puisse le reconnaître. Enfin j'ai observé que l'engorgement des vaisseaux lymphatiques et des corpuscules ne suit pas la ligature des vaisseaux, quand la mort de l'animal n'a pas été prompte, et qu'elle a été précédée de souffrances. Il faut supposer, que, dans ce dernier cas, les lymphatiques se sont vidés pendant l'agonie, sans se remplir de nouveau.

Expérience 7. Un chien, auquel on avait refusé toute nourriture (y compris la boisson) pendant 24 heures, fut tué par la section de la

(1) Il résulte des expériences curieuses, faites par Assolant et Dupuytren, que la rate, malgré son apparence d'*unité*, ne ressemble pas moins aux glandes distinctement divisées en lobes et lobuscules. Chaque artère de la rate semble occuper un canton que ses divisions remplissent, et au-delà duquel elles ne s'étendent pas, même par *voie d'anastomose*. Voir Assolant *Rech. sur la rate*. Paris, an X, p. 37. *Dictionn. Sc. Médic.* Paris, 1820, tome 47, p. 228.

moëlle épinière entre l'occipital et la première vertèbre cervicale. Les corpuscules visibles de la rate étaient très-peu nombreux ; il n'y avait que trois sur une section longitudinale de cet organe, qui surpassaient $\frac{1}{6}$ de ligne. Ils contenaient un liquide pâle rougeâtre, circonstance qui contribuait sans doute, à soustraire à la vue un grand nombre de corpuscules.

J'examinai ce liquide sous le microscope, et je n'y découvris que très-peu de globules. La matière rouge ne semblait pas adhérer à ces derniers, mais paraissait dissoute dans le liquide.

On sait que Hewson d'abord, et plus tard Fohmann et MM. Tiedemann et Gmelin ont regardé comme très-importante cette coloration rouge qu'ils avaient observée dans le contenu des vaisseaux lymphatiques de la rate, et que leur théorie sur la fonction de cet organe s'appuie même en grande partie sur ce fait. Cependant, cette coloration rouge doit avoir lieu très-rarement. Car je ne l'ai observée que dans le cas, dont je parle et encore dans un autre relaté quelques pages plus haut (*Exp.* 5). M. Nasse la considère comme l'effet de la faim.

Expérience 8. Un autre chien fut privé de nourriture pendant 18 heures. Je sortis la rate de l'animal vivant, et la remplaçai dans la cavité abdominale après avoir lié tous les vaisseaux de la scissure.

Une demi heure après, l'animal fut tué. Toute la rate était remplie de corpuscules *blancs*, mais excessivement petits, à l'exception de quelques-uns, qui se trouvaient près de la surface de l'organe.

Expérience 9. Après avoir soumis un chien à un jeûne de 10 heures, on lui donna à boire abondamment. Une demi heure après qu'il eut bu, il fut étranglé. L'estomac était distendu considérablement par le liquide ; il y avait en outre une assez grande quantité de ce dernier dans le duodénum, malgré le resserrement de l'orifice pylorique. Les corpuscules de la rate étaient très-développés (la plupart avaient $\frac{1}{4}$-$\frac{1}{3}$''') et très-nombreux, presque transparents et non pas blancs opaques, comme à l'ordinaire. Des vaisseaux lymphatiques du plan superficiel se laissaient distinguer çà et là.

Expérience 10. Un chien fut nourri pendant 24 heures exclusivement de substances solides, de pain et de pommes de terre. Quatre heures après qu'il eut pris de la nourriture pour la dernière fois, il fut tué.

Les vaisseaux lymphatiques du mésentère étaient gorgés de lymphe, les corpuscules de la rate gonflés ($\frac{1}{3}$-$\frac{3}{4}$'''), très-nombreux, et d'une blancheur parfaite.

Cette expérience faite une seconde fois a donné le même résultat.

Expérience 11. Sur un autre chien, je sortis la rate et liai deux branches artérielles avant leur point d'immersion dans l'organe. Je la replaçai ensuite dans la cavité abdominale et je fermai la plaie par quelques sutures. L'animal refusa la nourriture le premier et le deuxième jour. Le troisième jour, quand il eut mangé à plusieurs reprises d'une soupe faite avec du pain et de la viande, il fut étranglé trois heures après ce repas. A l'autopsie, je trouvai la rate, le gros épiploon et une partie des intestins couverts d'une couche de fibrine exsudée. Les vaisseaux lymphatiques n'étaient que peu remplis de chyle. Mais en incisant les glandes mesaraïques, on pouvait en exprimer une assez grande quantité. Tout le tissu de la rate était ramolli. On voyait des corpuscules assez grands mais peu nombreux, surtout au voisinage de la surface de l'organe. La partie correspondant aux artères liées était d'une couleur plus foncée (noire-rougeâtre) que le reste de l'organe, et le ramollissement y semblait plus prononcé. Quant aux corpuscules, ils n'étaient ni plus ni moins abondants dans cette portion.

Examen microscopique du contenu des corpuscules.

Pour obtenir le liquide contenu dans les corpuscules, aussi pur que possible, je fis choix de ceux qui étaient les mieux développés dans une rate dont les vaisseaux avaient été liés. J'enfonçai dans le corpuscule la pointe d'un scalpel très-fin en ayant soin d'éviter le contact de la masse pulpeuse rouge (parenchymateuse). Le liquide qui resta adhérent au scalpel fut mis sur le porte-objet et délayé tantôt avec de l'eau distillée, tantôt avec de l'eau sucrée.

Le nombre de granules contenus dans ce liquide, est très-considérable. Leur grandeur, (mesurée à l'aide d'un micromètre à pointes) varie entre $\frac{1}{150}$ et $\frac{1}{100}$ de millimètre (0,007-0,010 mm.). Tous présentent une forme sphérique, non aplatie, et une surface inégale, comme déchiquetée. L'eau distillée ne change pas la forme de ces granules. Quant à leur coloration on observe de grandes différences. Dans la plupart des cas, ils sont parfaitement incolores, mais on en trouve parfois de mêlés aux autres, qui présentent une coloration jaune ou rougeâtre. On observe les granules rougeâtres de préférence dans les petits corpuscules, tandis que ceux contenus dans des vésicules gonflées sont presque sans exception incolores.

Par la macération, chaque granule se dissout en une masse gru-

meleuse, consistant en globules excessivement petits. Il m'a été impossible de voir un *noyau*, ni par suite de la macération, ni par l'emploi de l'acide acétique.

Outre la masse moléculaire qui entoure les granules et qui peut-être n'est que le produit de la décomposition commençante de ces derniers, on rencontre parfois des globules plus petits, souvent accolés les uns aux autres, et insolubles dans l'acide acétique. Leur grandeur n'atteint pas $\frac{1}{200}$ de millimètre.

Je vais compléter mes observations à l'aide de celles faites par d'autres. J. Müller (1) dit que les granules contenus dans les vésicules de la rate ressemblent entièrement et par leur volume et par leur forme, à ceux qui constituent la substance rouge (pulpeuse) de la rate.

Ils ont la grandeur des globules du sang, mais en diffèrent essentiellement par leur forme sphérique irrégulière et non pas aplatie.

M. Bischoff (2) à Heidelberg trouve de l'identité entre les granules de la rate et ceux du chyle.

M. Henle (3) trouve, comme Müller, de la ressemblance entre les granules du parenchyme rouge et ceux contenus dans les corpuscules. Il insiste en outre sur l'analogie qui existe entre les granules en question et ceux qu'on trouve dans la glande thyroïde et dans le thymus. Les granules sont pour la plupart parfaitement sphériques, insolubles dans l'eau et dans l'acide acétique, et ils n'excèdent pas la grandeur de 0,0018‴. Dans leur intérieur ils sont tout-à-fait homogènes, et privés de noyau. A leur surface sont accolés des molécules ou granules élémentaires qui la rendent inégale et âpre. Il se trouve mêlés à ces granules, d'autres plus grands mais peu nombreux, dont le diamètre atteint jusqu'à 0,006‴. Ceux-ci sont tantôt parfaitement clairs, tantôt granuleux par suite de la forme de leur contenu qui est renfermé dans une membrane lisse (4).

(1) *Archiv für Anat. Physiol.* 1834. S. 88.

(2) *J. Müllers Archiv.* 1838. S. 501.

(3) *Allgem. Anatom.* 1841. S. 1002 (Nouvelle édit. de Soemmering. Vol. VI.)

(4) Quant aux parois des vésicules ou corpuscules de Malpighi, Henle remarque dans son important *Traité d'anatomie générale*, page 1001, qu'elles ne consistent elles-mêmes qu'en granules, et que ce n'est qu'à leur face externe qu'on peut remarquer des faisceaux de fibres cellulaires. A la page précédente il assure avoir vérifié par l'observation microsco-

M. Gluge (1) a examiné ce liquide sur une rate d'homme hypertrophiée, et comparativement avec celui d'une rate humaine normale. Il consistait en globules irréguliers gris-blanchâtres, inaltérables par l'acide acétique et par l'eau. Chaque globule consistait en une masse blanchâtre, qui en renfermait une autre plus obscure dans son intérieur. Le noyau proprement dit manquait. Tous avaient le même diamètre, savoir 0,0003 pouces de Paris.

CONCLUSIONS :

1. Les corpuscules de Malpighi sont *creux*, chez les carnassiers aussi bien que chez les herbivores.

2. Ils contiennent dans leur cavité un fluide qui semble tenir le milieu entre le chyle et la substance qui forme la masse pulpeuse rouge de la rate.

3. Le fluide est ordinairement blanc, et ce n'est qu'accidentellement (par l'absorption de la matière pulpeuse rouge ?) qu'il prend une coloration rougeâtre. *Exp.* 5, 6.

4. Ce fluide est abondant dans certaines circonstances, tandis qu'il est réduit au *minimum* dans certaines autres.

5. Par suite, les corpuscules sont capables d'une extension et d'un affaissement, selon la quantité de liquide qu'ils renferment.

6. Le gonflement et l'affaissement des corpuscules ne dépendent pas de la quantité de sang qui circule dans les veines et probablement non plus de celle qui circule dans les artères. *Exp.* 2, 3, 4.

7. Ni les artères ni les veines ne s'ouvrent librement dans les corpuscules, quoique les recherches anatomiques prouvent que les unes et les autres sont en rapport avec ces organes, et se terminent même dans leurs parois. *Exp.* 4, 5.

8. Les corpuscules sont en continuité avec des vaisseaux autres que les artères et les veines, et c'est par ces vaisseaux que leur liquide peut s'échapper. *Exp.* 1.

9. C'est par les mêmes vaisseaux que les corpuscules de la rate sont

pique l'opinion de Giesker. qui considère les prolongements ou filaments auxquels tiennent les vésicules, comme de véritables vaisseaux. — J. Müller aussi fait observer que les parois des corpuscules ne consistent qu'en un aggrégat de granules irréguliers, qui ne se laissent pas détacher les uns des autres. *Arch. f. Anat. Phys.* 1834. p. 88.

(1) *Haesers Archiv.* 1841. B. II. Hft. 1.

en continuité les uns avec les autres, et que par suite le liquide peut passer de l'un dans l'autre. *Exp.* 1, 5, 6.

10. Malgré cela, ce n'est pas que chaque corpuscule soit en rapport avec *tous* les autres ; au contraire, cette libre communication n'existe que pour les corpuscules qui se trouvent dans le même département de la rate formé par les divisions d'un même rameau de l'artère ou de la veine splénique. *Exp.* 6.

11. Ces vaisseaux qui relient les corpuscules, et qui servent de passage au liquide que ceux-ci contiennent sont des *lymphatiques*. *Exp.* 1, 5, 6.

12. Les corpuscules se gonflent par la même cause qui fait gonfler les vaisseaux lymphatiques. *Exp.* 5, 6.

13. Le fluide contenu dans les corpuscules trouve son écoulement par les troncs lymphatiques qui, en quittant la rate sont appliqués sur les rameaux de la veine splénique, et qui en dernier lieu aboutissent dans le canal thoracique. *Exp.* 5.

14. Par conséquent, la ligature des troncs lymphatiques de la scissure de la rate est un bon moyen de rendre apparents, non seulement, comme Ruysch et Ev. Home l'avaient déjà observé, les vaisseaux lymphatiques de la rate, mais encore les corpuscules en question. *Exp.* 5, 6, 8.

15. Les corpuscules s'affaissent et deviennent invisibles pour la plus grande partie chez un animal affamé. *Exp.* 7, 8.

16. La réplétion de l'estomac par des boissons, ainsi que Ev. Home, Heusinger, Meckel, Berthold et autres l'avaient observé, fait gonfler les corpuscules. *Exp.* 9.

17. Mais les liquides introduits dans l'estomac ne produisent pas seuls cet effet. Le gonflement des corpuscules est plus considérable encore pendant l'absorption chyleuse. *Exp.* 10.

18. En général, le volume des corpuscules est en rapport direct avec l'activité de l'absorption dans les parois de l'estomac et dans celles de l'intestin grêle.

19. Des observations nombreuses ont prouvé que la congestion sanguine, l'inflammation, le ramollissement du tissu de la rate font disparaître les corpuscules.

Si, après ces conclusions, on revient à la question principale, celle qui touche la véritable nature des corpuscules, il me semble que parmi les opinions émises jusqu'ici, on n'a de choix possible, qu'entre les deux suivantes :

La première se rattache à l'hypothèse formulée par MM. Tiedemann et Gmelin. Les vaisseaux lymphatiques du mesentère se rendent soit

tous, soit pour la plus grande partie, dans la rate, dans le but d'y faire subir au chyle une transformation, c'est-à-dire un acte de sanguification.

Les lymphatiques entrés dans la rate, y éprouvent des dilatations, c'est-à-dire, y forment des *sinus* ou des varicosités dans le but de mettre leur contenu (la lymphe ou le chyle) en rapport avec celui des artères qui se ramifient sur les parois de ces varicosités. Les corpuscules blancs de la rate ne sont rien autre chose que ces *sinus* ou varicosités des vaisseaux lymphatiques.

Le chyle doit recevoir ici des principes fournis par le sang artériel, pour être assimilé au sang.

Ce principe serait, suivant Tiedemann et Gmelin, la matière colorante rouge.

Le chyle ainsi modifié ou transformé passe par les vaisseaux lymphatiques efférents de la rate, d'abord dans les glandes lymphatiques placées entre les deux feuillets de l'*épiploon gastro-splénique*, et ensuite soit dans le canal thoracique, soit, si l'on veut, avec Fohmann, en partie dans les rameaux veineux qui se rencontrent dans les glandes lymphatiques précitées.

Ce qui milite en faveur de cette opinion c'est d'abord la grande richesse de la rate en vaisseaux lymphatiques, richesse qui a déjà été signalée par Ruysch, ainsi que par Cruikshank et Mascagni. Ev. Home a en outre fait remarquer que les lymphatiques de la rate sont plus gros que dans tous les autres organes, observation qui a été confirmée par M. Tiedemann (1). Puis, la présence et le degré de développement des corpuscules semble être en rapport avec le développement que prennent les glandes lymphatiques; du moins les corpuscules ne sont bien visibles que dans la classe des mammifères. Et dans une même espèce d'animaux le même fait se présente encore. Les corpuscules sont développés davantage dans la jeunesse, époque à laquelle les lymphatiques aussi prédominent le système sanguin. Enfin nos expériences nous ont appris que le volume et le degré de réplétion des corpuscules sont toujours en rapport avec celui des vaisseaux lymphatiques (2).

(1) *Tiedem. et Gmelin Recherch. sur la rate*, etc., p 82.

(2) La ramification des artères sur les parois des corpuscules n'aurait rien d'extraordinaire. Car Mascagni (*Vasor. lymphat. C. H. histor. et ichnogr.* Senis, 1787, p. 67, tab. II, f. 8) a démontré que dans des glandes lymphatiques ordinaires, les ramifications profondes des vais-

Mais d'un autre côté, des objections plus ou moins graves ne tardent pas à se présenter.

La coloration rouge de la lymphe contenue dans les lymphatiques efférents de la rate, n'est nullement un fait aussi constant que Hewson, Fohmann, Tiedemann et Gmelin, l'avaient assuré. Au contraire la plupart du temps, la lymphe de la rate ainsi que le contenu des corpuscules ne présentent qu'une coloration *blanche*, et cela a *constamment* lieu pendant et peu de temps après la digestion, époque à laquelle la sanguification du chyle doit procéder avec le plus de vigueur. Mes observations m'obligent d'adhérer entièrement à l'opinion exprimée par Nasse, que la coloration de la lymphe dans cet organe est l'effet de la faim. Personne ne doutera, que la teinte rouge que prennent la lymphe et le contenu des corpuscules ne proviennent de l'absorption d'une partie de la matière pulpeuse rouge dans laquelle les corpuscules et les lymphatiques sont logés. Eh bien, un vaisseau, contenant une faible quantité de liquide, absorbe plus et avec plus de facilité, qu'un autre gorgé de fluides. Aussi, quand j'ai pu reconnaître à la lymphe une teinte rouge, c'était sur des animaux qui avaient jeûné pendant quelque temps, et chez lesquels le volume des lymphatiques et des corpuscules était réduit au *minimum* (*Exp.* 5 et 7).

J'ai donc la conviction qu'une absorption, du moins notable, de la matière pulpeuse rouge, n'a lieu que quand les lymphatiques ne charrient que peu de fluides, c'est-à-dire, hors du temps de la chylification, et que cette absorption doit être *abondante* chez un animal affamé (1).

Il est difficile aussi d'adopter l'opinion que tous les lymphatiques du mésentère se rendent dans la rate, surtout depuis que cette opinion

seaux afférents sont encore enveloppées d'un réseau vasculaire sanguin. — L'existence des varicosités des lymphatiques a également son exemple dans ce que Mascagni appelle les *cellules des glandes lymphatiques* (*l. c.*, p. 67, tab. II, f. 7).

(1) C'est à tort aussi, qu'on généralise trop le fait que les lymphatiques du foie charrient une lymphe jaune. A l'état normal des fonctions, la lymphe du foie m'a toujours offert une coloration blanche. Ce n'est que dans des cas de hypercholie, ainsi que dans ceux d'une obstruction du conduit hépatique, que la lymphe du foie présente une coloration jaune. De la même manière la coloration noire de la lymphe des poumons ne s'observe bien que chez les vieillards, chez qui la matière noire des poumons est devenue plus abondante. — Il est connu que le sang extravasé est resorbé en substance par les lymphatiques. Mas-

a été positivement contredite par plusieurs anatomistes d'une grande autorité, par exemple Bojanus et Meckel pour les reptiles (1).

Enfin l'objection la plus grave consiste en ce que le contenu des corpuscules n'est nullement identique avec celui des vaisseaux lymphatiques, quoique ces globules se rapprochent assez, par leur forme et par leurs dimensions, de ceux de la lymphe.

Quant à l'acte même qui aurait lieu dans les varicosités des vaisseaux lymphatiques de la rate, on ne serait pas absolument forcé, d'admettre avec Tiedemann et Gmelin, qu'il consiste en une absorption de la matière colorante rouge. L'oxygène seul, d'après des expériences connues, est en état de rougir le chyle et de transformer une partie de son albumine en fibrine. Je crois que dans l'état actuel de nos connaissances sur la composition du sang, il ne paraîtrait pas par trop hasardé, de faire consister l'acte qui a lieu dans les corpuscules, en une simple oxygénation du chyle, l'oxygène étant fourni par le sang artériel avec lequel le premier fluide est mis en rapport. Il y aurait ici, si l'on veut me passer l'expression, une véritable *respiration indirecte.*

L'autre manière d'expliquer la nature des corpuscules, serait de les regarder, avec Malpighi, comme une espèce de glandes qui secrètent un liquide, pour lequel les vaisseaux lymphatiques servent de conduits excréteurs.

Les corpuscules seraient de véritables vésicules en communication libre avec les lymphatiques, et la rate elle-même, une espèce de glande conglomérée dans laquelle les grains ou *acini*, au lieu de se toucher les uns les autres, seraient dispersés et logés séparément dans une matière pulpeuse rouge, qui elle-même est soutenue par la masse fibreuse blanche qui forme la trame du tissu de la rate.

Les artères épanouiraient leurs ramifications sur les parois des vésicules dans le but de fournir à ceux-ci la matière d'où le fluide sécrété doit être extrait.

On rencontre encore avec cette seconde hypothèse des difficultés graves.

cagni a vu ces derniers vaisseaux jusqu'à leur insertion dans le canal thoracique, remplis de sang, chez des sujets morts par suite de grandes extravasations sanguines. (*Vasor. lymphatic. c. h. historia et ichnogr.* Senis 1787. p. 21.)

(1) *Bojanus Anat. Fest. Europ. Vilnæ* 1821. p. 145. *I. F. Meckel System der Vergl.* B. V. S. 233.

Comment expliquer ce fait que le gonflement des vésicules est toujours en rapport avec l'absorption chyleuse et surtout avec la quantité de chyle qui se trouve dans les vaisseaux absorbants du mésentère? Comment expliquer que tout ce qui fait gonfler les lymphatiques de la rate, produit le même effet sur les corpuscules ? Comment expliquer enfin, que la quantité de liquide, puisse encore s'augmenter, même quand une ligature a été appliquée à l'artère splénique ?

De l'autre côté on peut expliquer par cette hypothèse la grande dépense en sang artériel qui se fait dans la rate. On conçoit pourquoi d'abord le volume de l'artère splénique est si considérable, et pourquoi surtout celui de la veine surpasse encore du double celui de l'artère.

En outre, presque tous les physiologistes semblent être d'accord actuellement pour regarder non seulement la rate, mais encore le thymus et la glande thyroïde, en un mot toutes les glandes vasculaires et sanguines comme des organes sécréteurs.

Les résultats de mes expériences ne peuvent pas encore conduire à la solution de cette question importante. Je continuerai mes recherches sur le même sujet, en fesant surtout la révision de tous les faits *anatomiques*, qui se rattachent aux petits organes, dont nous venons d'étudier quelques caractères physiologiques.

VII. *Sur la double génération des surfaces du second degré par le mouvement d'un cercle,*

par **M. J. B. BRASSEUR**,

Professeur de géométrie descriptive et de mécanique appliquée à l'Université de Liége, etc.

(*Planche 4*).

Je me propose de traiter, d'une manière élémentaire, la double génération des surfaces du second degré par le mouvement d'un cercle variable de rayon et de déduire de cette génération quelques propriétés simples, qui mettent en état de résoudre par la géométrie descriptive les questions qui ont rapport aux plans tangents à ces surfaces ainsi qu'à quelques intersections. Je ne suppose connues que les notions les plus simples de la Géométrie analytique plane.

PRINCIPES PRÉLIMINAIRES.

1. Principe. — *Si deux droites de l'espace, faisant chacune le même angle avec le plan horizontal, se coupent mutuellement en deux parties de manière, que le produit des deux parties de l'une égale le produit des deux parties de l'autre, la même relation existera entre les projections horizontales de ces mêmes parties.*

Démonstration. — Désignons par (a), (b) les deux parties de la première droite et par a, b les projections de ces mêmes parties. Désignons de même par (a'), (b') les deux parties de la seconde droite et par a', b' les projections de ces mêmes parties.

$$\text{On donne : } (a) \times (b) = (a') \times (b') \quad \ldots. \quad (1)$$

$$\text{Il faut prouver que } a \times b = a' \times b' \quad \ldots. \quad (2)$$

Or si α est l'angle que chacune des deux droites fait avec le plan horizontal, il suffira de multiplier les deux membres de l'équation (1) par $\cos^2\alpha$ pour la faire coïncider avec l'équation (2).

2. Réciproquement. — *Si deux droites de l'espace, faisant chacune le même angle avec le plan horizontal, se coupent mutuellement en deux parties, de manière que le produit des projections des deux parties de la première égale le produit des projections des deux parties de la seconde, la même relation existera entre les parties de ces droites dans l'espace.*

Démonstration. — Dans le cas actuel l'équation (2) est donnée et il s'agit de prouver l'équation (1). En désignant par α l'angle que chaque droite fait dans l'espace avec le plan horizontal, il suffira de diviser les deux membres de l'équation (2) par $\cos^2 \alpha$ pour en déduire l'équation (1) cherchée.

3. *Remarque.*—Nous remarquerons que deux droites qui se coupent dans un plan de l'espace feront des angles égaux avec le plan horizontal, lorsqu'elles font chacune le même angle avec une horizontale ou avec une ligne de plus grande pente de ce plan; ou bien, lorsque les projections de ces droites font le même angle avec la projection d'une horizontale ou avec la projection d'une ligne de plus grande pente de ce plan.

4. Définition. — *Dans une courbe du second degré nous nommerons cordes anti-parallèles, deux cordes qui sans être parallèles, font chacune les mêmes angles avec un même axe, ou diamètre principal, de la courbe*

5. Principe. — *Si deux cordes anti-parallèles d'une courbe du second degré se coupent mutuellement en deux parties, le produit des deux parties de la première est égal au produit des deux parties de la seconde.*

Démonstration. — Cette propriété qui, à ma connaissance n'a pas encore été énoncée, je vais la démontrer pour le cas de l'ellipse qui peut être considerée comme la projection orthogonale d'un certain cercle de l'espace.

Lorsqu'un cercle se projette dans une ellipse, le diamètre horizontal du cercle se projette dans le grand axe, et le diamètre perpendiculaire au précédent, c'est-à-dire, le diamètre de plus grande pente se projette dans le petit axe de l'ellipse. Cela étant, deux cordes quelconques anti-parallèles de l'ellipse seront les projections de deux cordes du cercle, celles-ci faisant chacune, d'après la remarque (3), un même angle avec le plan de projection, ici plan de l'ellipse ; et puisque dans le cercle les deux cordes se coupent mutuellement en deux parties de manière que le produit des deux parties la première égale le produit des deux parties de la seconde, il suit d'après (1) que la même propriété existe pour deux cordes anti-parallèles de l'ellipse.

Cette propriété se démontre de la même manière pour les autres courbes du second degré, en les considérant comme projections centrales du cercle.

Voici la réciproque que nous laissons à démontrer:

Réciproque. — *Deux cordes d'une courbe du second degré qui se coupent mutuellement en deux parties, de manière que le produit des*

deux parties de l'une égale le produit des deux parties de l'autre, sont deux cordes anti-parallèles.

On démontrerait de la même manière les deux théorèmes (6 et 7) que voici (ainsi que leurs réciproques) :

6. Principe. — *Si d'un point donné hors d'une courbe du second degré on mène deux sécantes anti-parallèles, c'est-à-dire, faisant chacune un même angle avec un même axe de la courbe, le produit de la première sécante entière par sa partie extérieure sera égal au produit de la seconde sécante entière par sa partie extérieure.*

7. Principe. — *Si d'un point donné hors d'une courbe du second degré on mène une tangente et une sécante anti-parallèles, la tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.*

8. Principe. — *Par les extrémités de deux cordes anti-parallèles d'une courbe du second degré, on peut toujours faire passer une circonférence de cercle; mais par les extrémités de deux cordes parallèles, qui ne sont pas des cordes principales, on ne saurait jamais faire passer une circonférence.*

Démonstration. — La première partie de cette proposition est vraie, soit que les deux cordes anti-parallèles se coupent dans l'intérieur ou que prolongées elles se coupent hors de la courbe du second degré; ce que l'on démontre facilement en menant une circonférence par trois des quatre extrémités et en prouvant, au moyen de (5 et 6), que cette circonférence doit nécessairement passer par la quatrième extrémité. La seconde partie de la proposition est trop facile à établir pour devoir nous y arrêter.

En se référant aux réciqroques des propriétés énoncées aux numéros (5 et 6) on établira sans peine la suivante :

9. Principe. — *Si une circonférence de cercle coupe une courbe du second degré en quatre points, deux côtés opposés quelconques du quadrilatère qui a pour sommets ces quatre points, ou bien, les deux diagonales de ce quadrilatère seront deux cordes anti-parallèles.*

10. Principe. — *Si par différents points d'une même tangente à une courbe du second degré on mène des sécantes parallèles, le rapport entre le produit d'une sécante entière par sa partie extérieure, et entre le carré de la tangente comptée depuis le point où elle rencontre cette sécante jusqu'au point de contact, sera toujours constant.*

Cet énoncé doit être modifié de la manière suivante pour l'hyperbole, dans le cas où les sécantes rencontrent les deux branches de cette courbe :

Si par tous les points d'une tangente à une hyperbole on mène des cordes parallèles comprises entre les deux branches de la courbe; le rapport du produit des deux segments que la tangente détermine sur une corde quelconque au carré de la tangente comptée depuis le point où elle rencontre cette corde jusqu'au point de contact, sera toujours constant.

Démonstration.—Nous nous contenterons d'indiquer, que le principe énoncé est évident pour le cas du cercle et qu'on l'étend très-facilement aux autres courbes du second degré en considérant l'ellipse comme projection orthogonale, la parabole et l'hyperbole comme projections centrales du cercle.

DOUBLE GÉNÉRATION DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

11. Deux diamètres égaux d'une courbe du second degré sont deux diamètres anti-parallèles et les cordes respectivement conjuguées à deux diamètres égaux constituent deux systèmes de cordes anti-parallèles. Cela posé, je dis que

12. Double génération. —*Les deux séries de circonférences de cercles, qui ont respectivement pour diamètres et pour projections deux systèmes de cordes anti-parallèles d'une courbe du second degré, constituent identiquement une même surface.*

13. Autrement. — *Si une circonférence de cercle variable de rayon, qui s'appuie sur une courbe du second degré prise pour directrice, se meut de manière que son centre parcourt l'un ou l'autre de deux diamètres égaux de la directrice et que son plan toujours perpendiculaire au plan de la directrice reste parallèle aux cordes conjuguées à ce diamètre, cette circonférence engendrera dans les deux cas identiquement la même surface.*

Démonstration. — Pour prouver que les deux séries de circonférences en question constituent identiquement la même surface, il suffit de prouver que deux circonférences se coupent dans l'espace, lorsqu'elles ont respectivement pour diamètres et pour projections deux cordes anti-parallèles qui se coupent dans une courbe du second degré.

Soient (*fig.* 1) ab, $a'b'$ deux cordes quelconques anti-parallèles de l'ellipse $aa'bb'$ se coupant au point m, je dis que les deux circonférences qui ont respectivement pour diamètres et pour projections ces deux cordes, se rencontrent dans l'espace au point projeté en m.

Soit h la hauteur du point (m) considéré comme appartenant à la circonférence (ab), il viendra $h^2 = ma \times mb$.

De même, si h' est la hauteur du point (m) considéré comme appartenant à la circonférence $(a'b')$, il viendra également $h'^2 = ma' \times mb'$; or, les cordes ab et $a'b'$ étant anti-parallèles, on a d'après (5) $ma \times mb = ma' \times mb'$; donc aussi $h^2 = h'^2$ et $h = h'$. Donc la verticale élevée au point m rencontre les deux circonférences au même point, et par conséquent, ces deux circonférences se coupent.

14. Les surfaces, construites d'après la définition précédente, sont des surfaces du second degré (*), ce que nous démontrerons, plus loin, en prouvant qu'une droite ne peut les rencontrer en plus de deux points chacune.

15. *Directrice.*— La courbe quelconque du second degré, qui sert à construire une surface du second degré, sera nommée directrice, et son plan sera toujours pris pour plan horizontal de projection, à moins qu'on n'avertisse du contraire.

16. *Lignes des centres.*— Les deux diamètres égaux respectivement conjugués aux deux systèmes de cordes anti-parallèles seront nommés lignes des centres, parce qu'en effet les centres des deux séries de circonférences se trouvent respectivement sur ces deux diamètres.

17. *Ombilics.*—Les extrémités des lignes des centres sont précisément les points que Monge a nommés les ombilics de la surface.

18. *Plans directeurs.*—Les deux plans verticaux, auxquels les plans des deux séries de circonférences sont respectivement parallèles, seront nommés plans directeurs.

19. Deux circonférences quelconques d'une même série seront nommées indifféremment génératrices circulaires, ou sections circulaires, parallèles; et deux circonférences quelconques appartenant respectivement aux deux séries seront dites génératrices circulaires, ou sections circulaires, anti-parallèles.

20. De ce qui précède, il résulte qu'une surface du second degré est entièrement définie : 1° par sa directrice et l'une de ses deux lignes des centres ; 2° par sa directrice et par la direction des cordes conjuguées à l'une des deux lignes des centres, c'est-à-dire, par sa directrice et la projection de l'un de ses deux plans directeurs.

Lorsque, dans le courant des démonstrations qui vont suivre, nous parlerons d'une ligne des centres, d'un plan directeur et de génératrices

(*) On trouve au Musée de l'Université l'ellipsoïde, le paraboloïde elliptique et l'hyperboloïde à une nappe que j'ai fait exécuter d'après cette définition.

circulaires, il faudra bien comprendre que ces trois éléments ont rapport à la même génération, c'est-à-dire, qu'il s'agit de génératrices circulaires parallèles à ce plan directeur et ayant leurs centres sur cette ligne des centres.

Dénominations et propriétés des surfaces du second degré.

21. Une surface du second degré tire son nom principal de celui de sa directrice ; ce sera :

22. *Un ellipsoïde*, si la directrice est une ellipse ;

23. *Un paraboloïde elliptique* si la directrice est une parabole ;

24. *Un hyperboloïde à deux ou à une nappe*, selon que, la directrice étant une hyperbole, les deux lignes des centres rencontrent ou ne rencontrent pas les deux branches de l'hyperbole ;

25. *Un cône oblique à base circulaire*, si la directrice est le système de deux droites qui se coupent. Nous remarquerons que l'axe d'un système de deux droites qui se coupent divise en deux également l'angle formé par ces droites ;

26. *Un cylindre oblique à base circulaire,* si la directrice est le système de deux droites parallèles. Nous remarquerons que l'axe d'un système de deux droites parallèles, est une droite située dans le plan et à égale distance des deux proposées.

27. *Remarque.*—Toutes les surfaces du second degré deviennent de révolution si les deux lignes des centres coïncident avec l'un ou l'autre axe de la directrice.

28. Définition.—*Nous nommerons section méridienne, ou simplement méridien, toute section faite dans une surface du second degré par un plan passant par une ligne des centres.*

29. Propriété. — *Toute section méridienne d'une surface du second degré est une courbe de même nature que la directrice de la surface.*

Démonstration.—Remarquons d'abord que deux plans quelconques, menés par une ligne des centres, coupent une même génératrice circulaire quelconque suivant deux diamètres égaux entre eux et conjugués à la ligne des centres, c'est-à-dire, ayant tous deux leur point milieu commun sur cette ligne. Cela posé :

Le plan sécant, en ce qu'il passe par la ligne des centres, coupe toutes les génératrices circulaires chacune suivant un diamètre ; et tous ces diamètres parallèles entre eux constituent pour la section un système de cordes conjuguées à la ligne des centres.

De même, le plan de la directrice coupe aussi la même série de génératrices circulaires chacune suivant un diamètre, et tous ces diamètres parallèles entre eux forment également pour la directrice un système de cordes conjuguées à la même ligne des centres.

Mais chaque corde de la section, d'après la remarque faite plus haut, a son égale dans la directrice, et cette corde et son égale rencontrent la ligne des centres au même point; d'où il suit que la seule différence qu'il y a entre ces deux systèmes de cordes, c'est que les cordes dans la section sont différemment inclinées, par rapport à la ligne des centres, que dans la directrice. Donc la section et la directrice sont, comme on sait par la géométrie analytique, des courbes de même nature.

50. *Rabattement d'un méridien.*—Pour rabattre, dans le plan de la directrice, la section faite dans une surface du second degré par un plan passant par une ligne des centres, cette dernière étant prise pour charnière : il suffit de rabattre une corde quelconque de la section (corde conjuguée à la ligne des centres), et de faire tourner toutes les cordes de la directrice conjuguées à la ligne des centres chacune autour de son point milieu jusqu'à ce qu'elles soient parallèles à la corde rabattue.

51. Propriété. — *Toute section méridienne d'une surface du second degré peut servir de nouvelle directrice pour l'une des deux générations, dont la surface est susceptible par le mouvement d'un cercle.*

Démonstration.—Comme un plan quelconque, passant par une ligne des centres, coupe chacune des génératrices circulaires qui ont leurs centres sur cette ligne, suivant un diamètre, et que tous ces diamètres parallèles entre eux constituent un système de cordes conjuguées à la ligne des centres; il suit réciproquement que, si dans une section méridienne d'une surface du second degré on construit toutes les cordes conjuguées à la ligne des centres, ces cordes seront toujours les diamètres des diverses génératrices circulaires dont la surface est composée ; seulement, le plan directeur ou ce qui revient au même les plans des génératrices seront inclinés ici par rapport au plan de la section, tandis qu'ils sont perpendiculaires au plan de la directrice.

52. Une surface du second degré est donc encore déterminée par une ligne des centres, en prenant pour directrice une section méridienne passant par cette ligne, si de plus on donne l'inclinaison du plan directeur sur le plan de la section. Delà le corollaire suivant :

53. *Si une circonférence de cercle variable de rayon, qui s'appuie sur une courbe de second degré prise pour directrice, se meut de manière que son centre parcoure un diamètre quelconque de la directrice et que son*

plan, constamment incliné d'une même quantité sur le plan de la directrice, reste toujours parallèle aux cordes conjuguées à ce diamètre, cette circonférence engendrera une surface du second degré.

34. Lorsqu'une section méridienne d'une surface du second degré est prise pour nouvelle directrice, nous la nommerons *directrice oblique*, afin de la distinguer de la directrice unique considérée jusqu'ici, que nous nommerons *directrice principale* (laquelle se réduit aux deux *arêtes principales* pour le cylindre ou le cône).

35. Une surface du second degré admet donc, pour une même génération, une infinité de directrices planes; mais de toutes ces directrices il n'y en a qu'une, la directrice principale, qui puisse servir à la double génération, parce que c'est la seule qui passe par les deux lignes des centres et qui, par suite, coupe les deux séries de génératrices circulaires de la surface. A cette occasion nous ferons la remarque générale : lorsqu'une surface a été engendrée par une certaine génératrice et un certain nombre de directrices; toute courbe, quelle qu'elle soit, qui coupe toutes les positions de la génératrice, peut remplacer l'une des anciennes directrices et servir avec les autres pour engendrer la même surface, par le moyen de la même génératrice.

36. Une surface du second degré étant donnée par une directrice oblique, une ligne des centres et l'inclinaison du plan directeur sur le plan de la directrice, ce qui permet de construire une série de génératrices circulaires; si l'on veut construire l'autre série, il faudra remonter à la directrice principale, en déterminant la section faite dans la surface par un plan mené par la ligne des centres perpendiculairement au plan directeur, ou perpendiculairement à une génératrice circulaire quelconque. De là résulte que :

37. *Lorsque deux surfaces du second degré ont une ligne des centres commune et même plan directeur, les plans de leurs directrices principales coïncident*; car par cette ligne on ne peut mener qu'un seul plan perpendiculaire au plan directeur commun.

38. Propriété. — *Dans toute surface du second degré, deux génératrices circulaires anti-parallèles quelconques sont toujours situées sur une même sphère, qui n'a d'autres points communs avec la surface que ceux de ces deux génératrices, et dont le centre est dans le plan de la directrice principale; mais deux génératrices circulaires parallèles ne peuvent jamais se trouver sur une même sphère.*

Démonstration.—Deux génératrices circulaires quelconques anti-parallèles se projettent sur le plan de la directrice principale dans deux cordes anti-parallèles, et la circonférence, que l'on peut toujours faire

passer par les extrémités de ces deux cordes anti-parallèles (8), sera évidemment un grand cercle de la sphère, sur laquelle les deux génératrices circulaires seront situées. Que deux génératrices circulaires parallèles ne puissent se trouver sur une même sphère, cela résulte de la seconde proposition énoncée au numéro (8).

Pour prouver que la sphère n'a d'autres points communs avec la surface que ceux des deux génératrices circulaires, on coupera la surface et la sphère par des plans respectivement parallèles aux deux plans directeurs et l'on verra que les deux sections circulaires faites par un même plan, l'une dans la sphère, l'autre dans la surface proposée, ne se coupent pas, ou bien doivent se couper sur l'une des deux génératrices circulaires anti-parallèles proposées.

On déduira sans peine, en se référant au numéro (9), le corollaire énoncé ci-après.

39. Propriété, corol.— *Une sphère qui passe par une génératrice circulaire d'une surface du second degré ne peut couper de nouveau la surface que dans une génératrice circulaire anti-parallèle.*

40. Centre. — *Le centre de la directrice d'une surface du second degré est aussi le centre de cette surface, c'est-à-dire que le milieu de toute droite menée par le centre de la directrice et terminée de part et d'autre à la surface coïncide avec ce centre.*

Démonstration. — Une ligne des centres est un diamètre commun à tous les méridiens qui passent par cette ligne; les centres de tous ces méridiens coïncident donc avec celui de la directrice.

Or, toute droite, menée par le centre de la directrice et terminée de part et d'autre à la surface, est un diamètre du méridien dont le plan passe par cette droite et l'une des lignes de centres. Donc, le milieu de cette droite coïncide avec le centre de la directrice. Donc, etc.

41. *Autrement.* — On peut démontrer directement cette proposition en prouvant qu'une droite qui joint un point quelconque de la surface avec le centre de la directrice étant prolongée d'une quantité égale à elle-même, l'extrémité de la droite ainsi prolongée se trouve sur la surface.

Soient (fig. 6) l'ellipse $aba'b'$ la directrice principale de la surface, c le centre de la directrice et ll' la ligne des centres.

Soit m la projection d'un point quelconque de la surface, cm sera la projection de la droite qui unit ce point avec le centre de la directrice. En prolongeant cm d'une quantité $cm' = cm$; cm' sera la projection de la droite prolongée d'une quantité égale à elle-même si les hauteurs verticales des deux points (m), (m') situés l'un au-dessus,

l'autre au-dessous du plan de projection sont égales.

Les deux cordes parallèles ab, $a'b'$ conjuguées à la ligne des centres et menées par m et m' sont les projections des deux génératrices circulaires.

Cela posé :

Le point (m) appartenant à la surface se trouvera sur la génératrice circulaire (ab) et en désignant par h sa hauteur il viendra $h^2 = am \times bm$; pour que le point(m') soit sur la surface, il faut qu'il se trouve sur la génératrice circulaire$(a'b')$ et pour cela que l'on ait $h'^2 = a'm' \times b'm'$, h' étant la hauteur du point (m'). Maintenant il reste à prouver que $h = h'$ c'est-à-dire, que $a'm' \times b'm' = am \times bm$.

A cause de $cm = cm'$, les deux cordes parallèles ab, $a'b'$ sont égales, et les deux triangles t, t' égaux : d'où l'on déduit sans peine que les deux segments am, bm sont respectivement égaux aux deux segments $a'm$, $b'm$ et par suite que $a'm' \times b'm' = am \times bm$. Donc etc.

En nommant diamètre d'une surface du second degré, toute droite menée par le centre et terminée de part et d'autre à la surface, on déduit de la démonstration précédente le corollaire que voici :

42. Corollaire. — *Les deux génératrices circulaires parallèles qui passent par les extrémités d'un diamètre sont égales.*

43. Plans principaux. — *Dans toute surface du second degré, le plan de la directrice principale et les plans verticaux projetés dans les axes de la directrice sont des plans principaux, c'est-à-dire, que chacun de ces plans divise en deux également toutes les cordes qui lui sont perpendiculaires.*

Démonstration. — Par un point quelconque de la surface nous mènerons à l'un de ces plans une perpendiculaire que nous prolongerons d'une quantité égale à elle-même, et il suffira de démontrer que l'extrémité de la perpendiculaire ainsi prolongée se trouve sur la surface. De cette manière la démonstration sera générale, car il sera prouvé qu'une droite ne peut rencontrer une surface du second degré en plus de deux points. (Même observation à faire au numéro 41).

Soient (fig. 10) l'ellipse $abb'a'$ la directrice principale de la surface ; les cordes anti-parallèles $ab, a'b'$, les projections de deux génératrices circulaires anti-parallèles ; les axes xx, yy de la directrice, les projections de deux plans verticaux, et m la projection d'un point quelconque de la surface.

Cela posé, mp perpendiculaire à yy sera la projection de la perpendiculaire menée du point (m) au plan vertical yy, et $pm' = pm$ sera la projection de cette perpendiculaire prolongée d'une quantité égale à elle-même. Les deux cordes anti-parallèles ab, $a'b'$ menées par m et m' seront les projections de deux génératrices circulaires anti-parallèles de la surface.

Puisque le point (m) est sur la surface, il est sur la génératrice circulaire (ab) et l'on a $h^2 = am \times bm$, h étant la hauteur du point (m). Pour que le point (m') soit sur la surface, il faut qu'il se trouve sur la génératrice circulaire $(a'b')$ et pour cela que l'on ait $h'^2 = a'm' \times b'm'$, h' étant la hauteur du point (m'); et à cause que la droite (mm') est une horizontale, il restera à prouver que $h = h'$ ou bien que $am \times bm = a'm' \times b'm'$.

Or, par construction mm' est parallèle à l'axe xx', et $mp = m'p$; d'où l'on conclut facilement que les deux cordes anti-parallèles ab, $a'b'$ sont égales et qu'elles sont divisées par mm' de manière que $ma = m'a'$ et $mb = m'b'$. D'où $h = h'$. Donc etc.

On déduit de la démonstration précédente le corollaire que voici :

Corollaire. — *Les deux génératrices circulaires anti-parallèles qui passent respectivement par les extrémités d'une corde parallèle à l'un des axes de la directrice sont égales.*

Il est facile de démontrer la propriété ci-après sans faire usage d'aucune figure.

44. Propriété. — *Tout plan passant par une ligne des centres est un plan diamétral dont les cordes conjuguées sont parallèles au plan directeur et perpendiculaires à la direction de l'intersection du plan directeur avec le plan proposé.*

45. Propriété. — *La surface du second degré, qui a pour directrice le système de deux droites qui se coupent, est une surface conique.*

Démonstration. — Soient (fig. 12) le système des deux droites sa', sa'' la directrice de la surface du second degré et les cordes parallèles $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, etc. inscrites dans l'angle $a'sa''$, les projections d'autant de génératrices circulaires de la surface. Cela posé, pour démontrer que la surface est conique, il suffit évidemment de prouver que toute droite, partant du point s et qui rencontre une de ces génératrices circulaires, les rencontre toutes.

Soit $sabc$.. etc. la projection d'une droite partant du point s et s'appuyant sur la génératrice circulaire $(a'a'')$ et soient o, h, h', h'', etc. les hauteurs respectives des points (s), (b), (c), etc. on aura :

$$sa : h = sb : h' = sc : h'' = \text{etc.}$$

$$\text{ou bien } \overline{sa}^2 : h^2 = \overline{sb}^2 : h'^2 = \overline{sc}^2 : h''^2 = \text{etc...} \quad (\alpha)$$

A cause que le point (a) est sur la génératrice circulaire $(a'a'')$, il vient $h^2 = aa' \times aa''$ et pour prouver que les autres points (b), (c), etc. se trouvent respectivement sur les génératrices circulaires $(b'b'')$, $(c'c'')$, etc. il suffit de faire voir que

$$h'^2 = bb' \times bb'',\ h''^2 = cc' \times cc'',\ \text{etc...} \quad (\beta)$$

Or la figure donne

$$\overline{sa}^2 : aa' \times aa'' = \overline{sb}^2 : bb' \times bb'' = \overline{sc}^2 : cc' \times cc'' = \text{etc...} \quad (\gamma)$$

comparant (α) à (γ), en observant que $h^2 = aa' \times aa''$, on en conclura les égalités (β). Donc etc.

46. Propriété. — *Une droite ne peut rencontrer une surface du second degré en plus de deux points.*

Démonstration. — Nous démontrerons d'abord qu'un cône, dont le sommet est en un point quelconque de la directrice d'une surface du second degré et qui a pour base une section circulaire quelconque de la surface, n'a d'autres points communs avec elle, à part le sommet, que ceux de la section circulaire. Ainsi il sera prouvé que toute droite menée d'un point quelconque de la directrice ne peut rencontrer de nouveau la surface qu'en un seul point.

Soient (fig. 5) l'ellipse $a\,b\,b'a'$ la directrice principale de la surface, et la corde ab la projection d'une section circulaire, prise pour base d'un cône ayant son sommet en un point quelconque S de la directrice; il faut démontrer qu'un point quelconque de l'espace, tel que celui projeté en m et qui n'appartient pas à la section circulaire (ab), ne peut se trouver à la fois sur la surface du cône et sur la surface proposée.

Pour cela menons par le point (m) le plan vertical $a''b''$ parallèle à ab; il coupera le cône suivant une circonférence ayant pour diamètre $a''b''$ et la surface proposée suivant une circonférence ayant pour diamètre $a'b'$. Cela posé, ces deux circonférences devraient se couper pour que le point (m) put se trouver à la fois sur la surface du cône et sur la surface proposée; mais cela est impossible, car deux circonférences ne sauraient se couper, lorsque leurs diamètres sont sur une même droite et que les extrémités de l'un de ces diamètres se trouvent entre les extrémités de l'autre.

Comme la démonstration que nous venons de donner ne cesse pas d'exister si l'ellipse $a\,b\,b'a'$, au lieu d'être la directrice principale, était une directrice oblique de la surface, il en résulte qu'une droite, menée par un point quelconque d'une surface du second degré, ne peut rencontrer de nouveau celle-ci qu'en un seul point. Donc etc.

Remarque.—La démonstration que nous venons de donner convient à l'ellipsoïde et au paraboloïde elliptique; pour l'étendre à l'hyperboloïde à une nappe, il faut établir au préalable la propriété ci-après.

47. Propriété.—*Par chaque point de l'hyperboloïde à une nappe passent deux droites qui rencontrent chacune toutes les génératrices circulaires de cette surface.*

Démonstration.—Soient (fig. 11) les cordes parallèles $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, etc. les projections d'un nombre quelconque de génératrices circulaires

de l'hyperboloïde à une nappe et a la projection d'un point quelconque de sa surface.

Imaginons le cône qui a pour base la génératrice circulaire $(a'a'')$ passant par le point (a), et pour sommet le point de contact de la tangente $tabc$... etc. menée par a à l'hyperbole directrice; je dis que l'arête du cône qui se projette dans la tangente $tabc$... etc. rencontre, outre la génératrice circulaire $(a'a'')$, base du cône, encore toutes les autres génératrices circulaires de l'hyperboloïde.

L'arête ($tabc$.. etc.) étant une droite de l'espace, si h, h', h'', etc. sont les hauteurs respectives des points (a), (b), (c), etc. on aura :

$$ta : h = tb : h' = tc : h'' = \text{etc.}$$

$$\text{ou bien } \overline{ta}^2 : h^2 = \overline{tb}^2 : h'^2 = \overline{tc}^2 : h''^2 = \text{etc...} (m).$$

Le point (a) étant sur la génératrice circulaire $(a'a'')$ on a: $h^2 = aa' \times aa''$; et pour démontrer que tous les autres points (b), (c), etc. de l'arête ($tabc$... etc.) se trouvent respectivement sur les génératrices circulaires $(b'b'')$, $(c'c'')$, etc. il suffit de prouver que

$$h'^2 = bb' \times bb'',\ h''^2 = cc' \times cc'', \text{ etc.}$$

Or toute tangente $tabc$.. etc. à une hyperbole divise un système quelconque de cordes parallèles $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, etc. menées entre les deux branches, de manière que l'on a (10)

$$\overline{ta}^2 : aa' \times aa'' = \overline{tb}^2 : bb' \times bb'' = \overline{tc}^2 : cc' \times cc'' = \text{etc}$$

comparant cette proportion à (m) il vient :

$$h^2 : aa' \times aa'' = h'^2 : bb' \times bb'' = h''^2 : cc' \times cc'' = \text{etc.}$$

et de ce que $h^2 = aa' . aa''$, il en résulte que

$$h'^2 = bb' \times bb'',\ h''^2 = cc' \times cc'', \text{ etc.}$$

ce qu'il fallait démontrer. Par les mêmes raisonnements on établira que la seconde tangente à l'hyperbole, que l'on peut mener par a, est la projection de la seconde droite qui rencontre toutes les génératrices de l'hyperboloïde. Donc, etc.

Maintenant il sera facile de démontrer qu'une droite ne peut rencontrer l'hyperboloïde à une nappe en plus de deux points sans y être située tout entière.

48. *Le cône, qui a pour base une génératrice circulaire d'une surface du second degré et pour sommet le point de rencontre des deux tangentes à la directrice menées par les extrémités de la corde, projection de la génératrice circulaire, est un cône circonscrit à la surface.*

Démonstration. — Soit (fig. 9) l'ellipse $a\,b\,b'a'$ la directrice principale de la surface et la corde ab la projection d'une génératrice cir-

culaire. Soient *sa*, *sb* les deux tangentes à la directrice, menées pa les extrémités de cette corde : il s'agit de faire voir que le cône, dont le sommet est en *s* et qui a pour base la génératrice circulaire projetée en *ab*, n'a d'autres points communs avec la surface que ceux de cette génératrice.

Remarquons d'abord que les deux tangentes *sa*, *sb* sont les arêtes principales de ce cône, qu'elles se coupent sur le diamètre conjugué à la corde *ab* et par suite sur la ligne des centres *sc* de la surface proposée ; donc le cône et la surface proposée ont une ligne des centres et un plan directeur (*ab*) communs.

Maintenant, en supposant que le point quelconque projeté en *m*, et qui n'est pas situé sur la génératrice circulaire (*ab*), puisse appartenir à la fois à la surface du cône et à la surface proposée, si l'on mène par ce point (*m*) le plan vertical $a''b''$ parallèle à *ab*, ce plan coupera le cône suivant une circonférence, ayant pour diamètre $a''b''$ et la surface proposée suivant une circonférence, ayant pour diamètre $a'b'$; ces deux circonférences devraient se couper au point projeté en *m*, pour que le point (*m*) pût appartenir à la fois à la surface du cône et à la surface proposée. Or, ces deux circonférences sont concentriques et de rayons différents, et ne sauraient ni se couper ni coïncider. Donc etc.

49. Corollaire. — *Tout cône, qui touche une surface du second degré suivant une génératrice circulaire, a un plan directeur et une ligne des centres communs avec la surface proposée ; les arêtes principales de ce cône sont tangentes à la directrice principale de la surface.*

50. *Corollaire.* — Tous les cônes qui touchent une surface du second degré, dans une même série de sections circulaires, ont leurs sommets sur la ligne des centres de ces sections.

51. Corollaire. — *Toutes les tangentes, menées par un même point d'une ligne des centres d'une surface du second degré à tous les méridiens qui passent par cette ligne, forment un cône qui touche la surface suivant une génératrice circulaire ayant son centre sur cette ligne et par suite le cône et la surface touchée ont une ligne des centres commune et même plan directeur.*

52 Propriété. — *Si à toutes les génératrices circulaires d'une même série d'une surface du second degré, on mène des tangentes par les points dans lesquels ces génératrices sont rencontrées par une section méridienne, l'ensemble de ces tangentes constituera une surface cylindrique qui par construction sera circonscrite à la surface proposée.*

Démonstration. — Il faut démontrer que toutes ces tangentes sont parallèles entre elles : ayant construit dans la section méridienne toutes les cordes conjuguées à la ligne des centres, ces cordes seront, comme nous l'avons remarqué ailleurs, les diamètres d'autant de génératrices circulaires ; et si à ces diamètres et par leurs extrémités, on mène des perpendiculaires parallèles au plan directeur, ces perpendiculaires seront les tangentes aux diverses génératrices circulaires ; ces tangentes sont donc parallèles entre elles comme étant toutes parallèles au plan directeur et perpendiculaires à une même direction, celle des cordes conjuguées à la ligne des centres. Delà on tire comme corollaire la propriété qui suit :

Propriété. — *Tout cylindre, parallèle au plan directeur et circonscrit à une surface du second degré, touche celle-ci dans une section méridienne.*

PLANS TANGENTS AUX SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

53. Problème. — *Par un point donné sur une surface du second degré mener un plan tangent.*

Solution. — Par le point donné on construira par rabattement une tangente à chacune des deux génératrices circulaires anti-parallèles qui passent par ce point ; la droite qui unit les traces horizontales de ces deux tangentes sera la trace horizontale du plan tangent. Nous ferons observer que la trace d'une droite est le point dans lequel cette droite rabattue rencontre la charnière qui a servi à la rabattre. Voyez (fig. 3).

L'ellipse $a\,a'b\,b'$ est la directrice principale de la surface, d, d' sont les projections des deux plans directeurs, m est la projection du point donné ; ab parallèle à d et $a'b'$ parallèle à d' sont les projections des deux génératrices circulaires anti-parallèles qui passent par le point (m). t' est la trace horizontale du plan tangent.

54. Problème. — *Par un point donné hors d'une surface du second degré mener un plan tangent dont le point de contact se trouve sur une génératrice circulaire donnée.*

Solution. — On construira d'après le numéro (48) le cône auxiliaire qui touche la surface proposée suivant la génératrice circulaire donnée ; le plan tangent à ce cône, mené par le point donné, satisfera à la question ; le point de contact du plan tangent sera à l'intersection de la génératrice circulaire avec l'arête dans laquelle le cône est touché.

Pour construire l'arête suivant laquelle le cône est touché par le plan

tangent, on mènera par le point donné un plan vertical parallèle au plan de la génératrice circulaire ; ce plan coupera le cône suivant une circonférence à laquelle on menera, par le point donné, une tangente. La droite qui joint le point de contact de cette tangente avec le sommet du cône sera l'arête touchée.

Voyez (fig. 13). *sc* est la ligne des centres, *m* est la projection du point donné ayant une hauteur égale à *h*, la corde *ab* conjuguée à *sc* est la projection de la génératrice circulaire donnée, *s* est le sommet du cône qui touche la surface suivant la génératrice circulaire (*ab*), etc., enfin *x* est la projection du point de contact du plan tangent cherché.

Le problème précédent est possible tant que par le point donné on peut mener un plan tangent au cône auxiliaire qui touche la surface dans la génératrice circulaire donnée, c'est-à-dire, tant que le point donné est sur le cône ou hors du cône ; et il devient impossible lorsque le point donné se trouve dans l'intérieur du cône.

Or, parmi tous les cônes qui touchent chacun la surface dans une génératrice circulaire il s'en trouvera un dont une arête passera par le point proposé. Ce cône, que nous nommerons cône limite, touche la surface proposée dans la génératrice circulaire limite, c'est-à-dire que le problème est impossible pour toute génératrice circulaire située au-delà de cette génératrice limite.

55. Cône et génératrice circulaire limites. — ***Construire un cône qui doit toucher une surface du second degré suivant une génératrice circulaire à déterminer et dont une arête doit passer par un point donné.*** (***Cette arête sera tangente au méridien dont le plan passe par le point donné.***)

Solution.—Soient (fig. 7) *sc* la ligne des centres, *dd* le plan directeur de la surface et *m* la projection du point proposé ayant une hauteur égale à *h*. On mènera par le point proposé (*m*) un plan auxiliaire *a'b'* parallèle au plan directeur *dd* de la surface ; ce plan coupera le cône limite à construire suivant une circonférence de cercle qui aura son centre en *c* sur la ligne des centres *sc* de la surface et qui passera par le point proposé (*m*) ; on aura donc le rayon de cette circonférence en cherchant la distance du point proposé au point *c*. (*r* est cette distance ou ce rayon rabattu autour de la charnière *a'b'*).

Connaissant le rayon d'une section circulaire du cône, on pourra construire la projection *a'b'* de cette section, en prenant *ca'* = *cb'* = *r*. Cela fait, si par les extrémités de cette projection on mène les deux tangentes *aa'*, *bb'* à la directrice, ces deux tangentes seront les arêtes principales du cône limite et la corde *ab* qui unit les deux points de

contact sera la projection de la génératrice circulaire limite cherchée.

56. Problème. — ***Parallèlement à une droite mener un plan tangent à une surface du second degré de manière qu'il touche la surface en un point d'une génératrice circulaire donnée.***

Solution. — On construira d'après le numéro (48) le cône auxiliaire qui touche la surface suivant la génératrice circulaire donnée ; le plan tangent à ce cône mené parallèlement à la droite donnée satisfera à la question ; son point de contact se trouvera à l'intersection de la génératrice circulaire avec l'arête dans laquelle le cône est touché.

Voyez (fig. 8). *sc* est la ligne des centres, *dd* est la projection du plan directeur, *ab* parallèle à *dd* est la projection de la génératrice circulaire donnée. Les tangentes *sa*, *sb* sont les arêtes principales du cône auxiliaire qui touche la surface dans (*ab*). Soit *sm* la projection d'une droite auxiliaire menée par le sommet du cône parallèlement à la droite donnée, le point (*m*) ayant une hauteur égale à *h*. *a'b'* est la projection d'une section circulaire faite dans le cône par le plan vertical *ma'b'*, parallèle à (*dd*) et mené par le point quelconque (*m*) de la droite (*sm*). *tt'* est le rabattement de la tangente menée par (*m*) à cette section circulaire, etc., etc, enfin *x* est la projection du point de contact du plan tangent cherché.

57. Cône et génératrice circulaire limites. — ***Construire un cône qui touche une surface du second degré dans une génératrice circulaire à déterminer et dont une arête soit parallèle à une droite donnée.***

Solution. Par un point quelconque de la ligne des centres, on mènera une parallèle à la droite donnée et l'on prendra cette parallèle pour l'arête d'un cône ayant même plan directeur et même ligne des centres que la surface proposée ; soit (fig. 2) *sm* la projection de cette arête ou de cette parallèle à la droite donnée, le point *m* ayant une hauteur égale à *h*. Ensuite on construira une section circulaire quelconque de ce cône, ce qui se fera en menant par le point quelconque (*m*) de cette arête le plan vertical *ab* parallèle au plan directeur *d* de la surface proposée ; la distance du point (*m*) au point *c* dans lequel ce plan rencontre la ligne des centres *sc* sera le rayon de cette section circulaire. *r* est cette distance ou ce rayon rabattu autour de la charnière *ab*. Prenant maintenant $ca = cb = r$, *ab* sera la projection d'une section circulaire du cône et *sa*, *sb* en seront les deux arêtes principales. Parallèlement à *sa*, *sb* menant à la directrice de la surface les deux tangentes *s'a'*, *s'b'*, ces tangentes seront les arêtes principales du cône limite

et la corde $a'b'$ la projection de la génératrice circulaire limite. Cette solution est basée sur le principe suivant très facile à démontrer :

58. Propriété. — *Deux cônes du second degré qui ont même ligne des centres et même plan directeur ont toutes leurs arêtes respectivement parallèles lorsqu'une arête de l'un est parallèle à une arête de l'autre.*

59. Au moyen des problèmes (54, 56) on résoudra facilement les deux suivants que nous nous contentons d'énoncer:

60. Problème.—*Construire la courbe suivant laquelle un cône circonscrit à une surface du second degré et ayant son sommet en un point donné, touche cette surface.*

61. Problème. — *Construire la courbe suivant laquelle un cylindre circonscrit à une surface du second degré et parallèle à une droite donnée, touche cette surface.*

62. Problème.—*Construire la courbe de contact d'un conoïde circonscrit à une surface du second degré et qui a pour plan directeur l'un des plans directeurs de cette derrière.*

Solution.—On prendra le plan directeur de la surface pour plan horizontal de projection et le plan de la directrice pour plan vertical de projection. Cela fait, on coupera la surface et la droite qui sert de directrice au conoïde par une série de plans horizontaux; chaque plan horizontal coupera la surface suivant une circonférence et la droite en un point, duquel menant deux tangentes à cette circonférence, leurs points de contact appartiendront à la courbe cherchée.

Problème.—*Par une droite mener un plan tangent à une surface du second degré.*

63. *Solution.*—On construira d'après (62) les courbes de contact de deux conoïdes circonscrits à la surface proposée et ayant pour directrice la droite proposée et respectivement mêmes plans directeurs que la surface proposée; l'intersection de ces deux courbes sera le point de contact du plan tangent cherché.

Autrement.— Le point de contact du plan tangent doit se trouver à l'intersection des courbes de contact de deux cônes circonscrits à la surface proposée et ayant leurs sommets en des points arbitrairement pris sur la droite ou bien à l'intersection de la courbe de contact de l'un de ces cônes avec la courbe de contact du cylindre parallèle à la droite donnée et circonscrit à la surface.

64. Problème. —*Parallèlement à un plan mener un plan tangent à une surface du second degré.*

Solution. — On cherchera l'intersection du premier plan directeur avec le plan proposé; parallèlement à cette intersection on imaginera des tangentes à toutes les sections circulaires parallèles à ce plan directeur; l'ensemble de ces tangentes constituera un cylindre parallèle au plan proposé et qui touchera la surface dans un méridien dont le plan passera par la ligne des centres et le point de contact de l'une des tangentes citées (52). Le point de contact du plan tangent devra se trouver sur ce méridien; il devra se trouver aussi sur un méridien que l'on obtiendra en opérant de la même manière avec l'autre ligne des centres et l'autre plan directeur; le point est donc déterminé par l'intersection de ces deux méridiens. Or l'intersection de deux méridiens passant respectivement par les deux lignes des centres doit se trouver sur la droite d'intersection des plans de ces méridiens. Mais cette droite d'intersection est un diamètre de la surface et la question est ainsi ramenée à chercher les points dans lesquels une surface du second degré est rencontrée par un de ses diamètres. Voyez ci-après la solution de ce problème.

65. Problème. — *Trouver les points de rencontre d'une surface du second degré avec une droite qui rencontre une ligne des centres.*

Solution. — Je prends cette droite pour arête d'un cône ayant même plan directeur et même ligne des centres que la surface proposée. L'intersection de ce cône avec la surface sera une ou deux génératrices circulaires qu'il suffit de déterminer pour que le problème soit résolu.

Soient (fig. 4) *sc* la ligne des centres, *dd* la projection du plan directeur, et *sm* la projection de la droite proposée, le point (*m*) ayant une hauteur égale à h. Cela posé, par le point (*m*) je mène le plan vertical *ab* parallèle au plan directeur *dd*; ce plan vertical coupera le cône suivant une section circulaire dont le centre sera en *c* et dont le rayon est la distance du point (*m*) au point *c*. On voit cette distance ou ce rayon rabattu en *r* autour de la charnière *ab*. Prenant maintenant $cb = ca = r$, *ab* sera la projection de cette section circulaire, et *sa*, *sb* seront les arêtes principales du cône qui coupe la surface proposée dans les deux génératrices circulaires projetées dans les cordes $a'b'$, $a''b''$. Donc x, y sont les projections des points de rencontre de la droite (*sm*) avec la surface proposée.

66. Problème. — *Par un point donné mener un plan tangent à une surface du second degré de manière que le point de contact se trouve sur un méridien donné.*

Solution.—Je conçois le cylindre qui touche la surface proposée suivant le méridien donné. Par le point donné je mène une parallèle

aux génératrices de ce cylindre (52) et je détermine le point de rencontre de cette parallèle avec le plan du méridien.

De ce point de rencontre je mène, d'après (l'art. 55), une tangente au méridien donné, le point de contact de cette tangente sera aussi celui du plan tangent cherché.

67. Problème.—*Parallèlement à une droite donnée mener un plan tangent à une surface du second degré, de manière que le point de contact se trouve sur un méridien donné.*

Solution.—Par un point quelconque de la droite proposée je mène une parallèle aux génératrices du cylindre circonscrit à la surface du second degré suivant le méridien donné ; je cherche l'intersection du plan, passant par la droite proposée et cette parallèle, avec le plan du méridien donné.

Parallèlement à cette intersection menant, d'après le numéro (57), une tangente au méridien donné, le point de contact de cette tangente sera aussi celui du plan tangent cherché.

DE QUELQUES INTERSECTIONS.

68. Problème. — *Trouver l'intersection d'une surface du second degré avec un plan quelconque.*

Solution. — Prenons le plan de la directrice de la surface du second degré pour plan vertical de projection, et l'un des deux plans directeurs pour plan horizontal de projection. Cela fait, on coupera la surface et le plan proposé par une série des plans auxiliaires horizontaux; chaque plan horizontal coupera la surface suivant une circonférence de cercle et le plan suivant une horizontale ; les points de rencontre de l'horizontale avec la circonférence appartiendront à l'intersection commune.

69. Problème.—*Chercher l'intersection d'une surface du second degré avec une surface cylindrique quelconque.*

Solution. — Prenons pour plan horizontal de projection un plan parallèle au plan directeur de la surface du second degré, alors toutes les sections horizontales seront des circonférences de cercle parallèles au plan horizontal de projection; et la solution revient à chercher les points dans lesquels chacune de ces circonférences parallèles au plan horizontal rencontrera la surface cylindrique.

70. Problème.—*Construire l'intersection d'une surface du second degré avec une surface cônique à base quelconque.*

Solution. — En prenant, comme dans dans le cas précédent, pour plan horizontal de projection, un plan parallèle au plan directeur de la surface du second degré, la solution revient à trouver les points dans lesquels chaque section circulaire de la surface rencontre la surface cônique, ce que l'on sait faire.

VIII. *Sur les transformées de l'équation du second degré à deux variables ;*

par J. MARTYNOWSKI,

Répétiteur de mathématiques à l'École des arts-et-manufactures et des mines de l'Université de Liége.

1. Le but immédiat de la construction d'une équation du second degré, à deux variables, étant d'assigner la position de l'origine et des axes, pour lesquels la transformée de l'équation proposée soit la plus simple possible : c'est à rechercher les diverses transformées auxquelles, en employant les formules de transformation, on peut ramener l'équation générale, que je me suis borné principalement. Il n'est point question ici des lignes du second degré, ni de leurs propriétés caractéristiques : objets pour lesquels je renvoie aux traités de géométrie analytique plane; mais seulement des diverses formes d'une seule et même équation du second degré, à deux variables, et de la relation qui existe entre ces formes.

Pour rendre la question aussi générale que complète, je rapporte constamment les systèmes de points, représentés par l'équation générale, à des axes des coordonnées comprenant l'angle quelconque θ. Ce point de départ est nécessaire pour deux motifs : d'abord le choix des axes n'est pas toujours arbitraire ; ensuite il influe, sinon sur le genre, du moins sur la variété de la courbe. Par exemple, l'équation $x^2+y^2-r^2=0$ représente tantôt un cercle et tantôt une ellipse, selon que les axes, dont on fait choix, sont rectangulaires ou obliques.

Pour donner l'idée du genre des difficultés que présente la recherche des transformées de l'équation générale, je ne citerai qu'un seul fait. Personne, à ce que je sache, n'a donné les coëfficients des transformées aux axes conjugués rectangulaires, pour toutes les courbes du second degré, d'une manière aussi générale que je le fais, c'est-à-dire en prenant, pour point de départ, les axes primitifs comprenant l'angle quelconque θ. C'est que, dans cette sorte de recherche, on est toujours aux prises avec deux équations du second degré, dont la combinaison conduit à une équation finale du quatrième degré. Je parviens à lever ces difficultés en établissant les diverses propositions, qu'on trouve consignées dans ce mémoire.

2. On sait que les lignes du second degré sont des systèmes de points représentés par des équations du second degré, à deux variables, et dont la forme générale est

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \; ; \quad (a)$$

A, B, C... étant des constantes; x, y, les coordonnées d'un point quelconque de la ligne que représente cette équation. Comme l'équation (a) ne peut être du second degré que quand des trois constantes A, B et C, l'une quelconque au moins n'est pas zéro; on voit que, dans la discussion des formes particulières de cette équation, on n'aura que deux cas à considérer : ou l'équation (a) est de la forme

$$Bxy + Dy + Ex + F = 0 \; ; \quad (b)$$

ou bien, A et C n'étant pas nuls à la fois, elle est résoluble par rapport à y ou à x, savoir :

$$\left.\begin{aligned} 2Ay &= -Bx - D \pm \sqrt{(mx^2 + 2n + s)} \\ 2Cx &= -By - E \pm \sqrt{(my^2 + 2ny + s')} \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

expressions dans lesquelles on a, pour abréger,

$$B^2 - 4AC = m, \; BD - 2BE = n, \; D^2 - 4AF = s,$$
$$BE - 2CD = n', \; E^2 - 4CF = s'.$$

Telles sont les formes générales et particulières de l'équation du second degré à deux variables. Voyons maintenant comment on peut, au moyen de la transformation des coordonnées, ramener ces équations à d'autres plus simples.

3. *Transformée générale.* — Soient X, Y les axes, comprenant l'angle quelconque θ, auxquels on rapporte les systèmes de points, représentés par l'équation (a) ; soient h et k les coordonnées de la nouvelle origine; t et t' les directions des nouveaux axes; u et u' les distances prises sur ces axes par rapport à l'unité de projection oblique sur X, savoir

$$u^2 = 1 + t^2 + 2t.\cos\theta, \; u'^2 = 1 + t'^2 + 2t'.\cos\theta :$$

les formules, qui expriment les coordonnées primitives en fonction des nouvelles, seront

$$x = h + \frac{x'}{u} + \frac{y'}{u'}, \; y = k + \frac{t'x'}{u} + \frac{t'y'}{u'}.$$

Cela posé, mettons ces expressions de x et y dans l'équation (a), et nous aurons la transformée générale représentant la même ligne, mais rapportée à des axes différents d'une autre origine :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{At'^2+Bt'+C}{u'^2}.\,y'^2+\dfrac{At^2+Bt+C}{u^2}.\,x'^2+\\[2mm] +\dfrac{2Att'+B(t+t')+2C}{u.u'}.\,x'y'+\\[2mm] +\dfrac{(2Ak+Bh+D)t'+2Ch+Bk+E}{u'}.\,y'+\\[2mm] +\dfrac{(2Ak+Bh+D)t+2Ch+Bk+E}{u}.\,x'+\\[2mm] +Ak^2+Bkh+Ch^2+Dk+Eh+F\end{array}\right\}=o\ (d).$$

Remarque. — 1° La transformée est toujours du même degré que la proposée : cela vient de ce qu'à la place des variables x, y de la proposée on met des fonctions du premier degré en x', y'.

2°. J'appelle terme en y'^2 le produit qui a y'^2 pour facteur, et ainsi des termes affectés des variables, x'^2, $x'y'$...; mais je réserverai le nom de *terme indépendant* à la dernière ligne de l'équation (d).

4. *Moyens de simplifier l'équation* (d). — A l'exception de la constante θ, qui est censée être donnée à priori, les quatre autres, savoir : h, k, t et t', qui proviennent de la transformation des coordonnées, sont à proprement dire des constantes arbitraires. Leur indétermination permet de faire disparaître un ou plusieurs termes de l'équation (d) : et c'est en quoi consistent les moyens de ramener l'équation (a) à d'autres plus simples. Mais, comme il y a quatre constantes arbitraires à déterminer, il faut nécessairement égaler à zéro les coëfficients des quatre termes de l'équation (d), pour avoir autant d'équations distinctes que de constantes à déterminer. Voyons comment et dans quel ordre l'évanouissement des termes de l'équation (d) peut s'opérer.

5. Observons d'abord que h et k ne se trouvent impliqués que dans les coëfficients des termes en x', y' et le terme indépendant de l'équation (d). Comme on n'a besoin que de deux équations, pour déterminer h et k, il suffit, à cet effet, d'égaler à zéro les coëfficients des termes en x' et y', ou celui de l'un d'eux seulement et le terme indépendant.

1° *Evanouissement des termes en* y' et x'. — La première combinaison qui s'offre, pour déterminer h et k, consiste à égaler à zéro les coëfficients de x' et y' dans l'équation (d), savoir :

$$\left.\begin{array}{l}(2Ak+Bh+D)\,t'+2Ch+Bk+E=o,\\ (2Ak+Bh+D)\,t+2Ch+Bk+E=o.\end{array}\right\}\ (e)$$

Or, ces équations sont incompatibles pour des valeurs différentes de t et t' : donc elles ne peuvent servir à déterminer h et k. Partant,

on ne peut combiner ces équations (e) avec une autre quelconque, qu'on obtiendrait en égalant à zéro un autre coëfficient de la transformée (d). Le seul moyen de faire subsister les équations (e) est de supposer $t = 0$, $t' = \infty$. Or, cette hypothèse répond au passage à des axes parallèles, lequel se fait indépendamment de toute valeur particulière de t et t'; et, par conséquent, il en est de même de l'évanouissement des termes en x' et y'.

2° *Evanouissement du terme indépendant et de l'un des termes en x' et y'.* — En égalant à zéro le coëfficient du terme en y' et le terme indépendant, on a

$$(2Ak + Bh + D)\, t' + 2Ch + Bk + E = 0,$$
$$Ak^2 + Bkh + Ch^2 + Dk + Eh + F = 0.$$

On voit d'abord que t' ne peut pas être variable ni admettre plus d'une valeur constante : car si cela avait lieu, la première équation se partagerait en ces deux :

$$2Ak + Bh + D = 0, \quad 2Ch + Bk + E = 0;$$

ce qui ferait évanouir à la fois les termes en x' et y', contre l'hypothèse et changerait de plus l'équation ci-dessus du second degré en h et k en une équation de condition. Supposons maintenant que t' n'admette qu'une seule valeur : l'équation qui le contient ne peut subsister avec la suivante, à moins que celle-ci ne donne que des valeurs uniques à h et à k. Pour nous assurer de ces conditions, résolvons l'équation en question par rapport à h ou k, savoir :

$$2Ak = -Bh - D \pm \sqrt{(mh^2 + 2nh + s)}.$$

Cette équation ne pouvant donner une valeur unique pour k, à moins que le radical ne soit nul, on a nécessairement

$$2Ak + Bh + D = 0, mh^2 + 2nh + s = 0.$$

La première de ces équations renverse déjà l'hypothèse de t' constant ; car en supposant le trinome $2Ck + Bh + D$ quelconque, l'équation ci-dessus en t' donne $t' = \infty$. Par suite de cette valeur de t' qui rend aussi $u' = \infty$, le coëfficient de y', dans l'équation (d), devient proprement $2Ak + Bh + D$, et par conséquent, indépendant de toute valeur particulière de t'.

De toute la discussion précédente, je conclus que, *la détermination simultanée de la nouvelle origine et des directions de nouveaux axes, au moyen de l'évanouissement des termes en x' et y', ou de l'un d'eux et du terme indépendant, sont deux opérations non-seulement distinctes, mais entièrement incompatibles.*

Nous allons encore faire voir que *des deux opérations précédentes la première doit précéder de rigueur la seconde.* Puisque les équations (e) ne peuvent subsister à moins que, par suite de l'hypothèse $t = 0$, $t' = \infty$, elles ne se partagent en ces deux

$$2Ak + Bh + D = 0, \quad 2Ch + Bk + E = 0;$$

il s'ensuit que cette hypothèse est antérieure à la coexistence de ces équations. Donc, etc.

Scholie. — Il résulte des propositions précédentes qu'il y a deux sortes de transformées de l'équation (a) : les unes qui dépendent du changement de l'origine ; les autres, du changement des axes à la nouvelle origine. L'article 6 sera consacré aux premières ; les articles suivants, aux secondes de ces transformées.

6. En posant $t = o$, $t' = \infty$, dans l'équation (d), on aura la transformée aux axes parallèles, savoir :

$$\begin{aligned} &Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + \\ &(2Ak + Bh + D)\,y' + (2Ch + Bk + E)\,x' + \\ &Ak^2 + Bhk + Ch^2 + Dk + Eh + F = 0. \qquad \text{(f)} \end{aligned}$$

Les termes en x', y' de cette équation disparaissent, en posant

$$2Ak + Bh + D = o, \quad 2Ch + Bk + E = 0.$$

Selon que ces équations sont *compatibles*, *incompatibles* ou *identiques*, h et k seront *possibles*, *impossibles* ou *indéterminés.*

Dans le premier de ces cas, l'équation (f) devient

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + F' = o, \qquad \text{(g)}$$

dans laquelle, on a, pour abréger, N° 2,

$$F' = \frac{n^2 - ms}{4\,A.\,m},$$

et

$$h = -\frac{n}{m}, \quad k = -\frac{n'}{m}.$$

Dans le second on ne pourra faire disparaître de l'équation (f) que l'un des termes en x', y' et le terme indépendant, en posant par exemple

$$2Ak + Bh + D = 0,$$

$$Ak^2 + Bkh + Ch^2 + Dk + Eh + F = 0.$$

A cause de $m = 0$, la première de ces équations partage la suivante en deux autres, telles que

$$2Ak + Bh + D = 0, \quad 2nh + s = 0,$$

qui remplacent les deux précédentes. Cela posé, en transposant l'origine au point

$$h = -\frac{s}{2n}, \quad k = -\frac{D}{2A} + \frac{Bs}{2An},$$

la transformée (f) prendra la forme

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + E'y' = 0, \qquad \text{(h)}$$

dans laquelle, on a, pour abréger,

$$E' = -\frac{n}{2A}.$$

Enfin, si h et k se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, on peut aisément ramener l'équation (a) à la forme

$$\sqrt{C}\,(y\sqrt{A} + x\sqrt{C})^2 + E\,(y\sqrt{A} + x\sqrt{C}) + F\sqrt{C} = 0 \qquad \text{(i)}$$

résoluble par rapport à $y\sqrt{A} + x\sqrt{C}$: ce qui l'exclut du rang du second degré.

J'indiquerai ici la manière la plus simple d'obtenir les transformées (g) et (h). En mettant le trinome du radical de l'équation (e) sous la forme

$$\frac{1}{m}\left[(mx + n)^2 - n^2 + ms\right];$$

on aura en posant

$$mx + n = mx', \quad x = x' - \frac{n}{m},$$

pour première transformation

$$2Ay = -Bx' + \frac{Bn}{m} - D \pm \sqrt{\frac{1}{m}(m^2x'^2 + ms - n^2)}.$$

Et en posant dans cette dernière

$$2Ay = 2Ay' + \frac{Bn}{m} - D \text{ ou } y = y' - \frac{n'}{m},$$

on aura, pour la seconde transformation

$$2Ay' = -Bx' \pm \sqrt{\frac{1}{m}(m^2x'^2 + ms - n^2)}$$

qui n'est autre que l'équation (g).

Lorsque $m = 0$, le même procédé servira à ramener l'équation (c) à la forme (h).

Il nous reste encore à réduire l'équation (b) à une forme plus simple; en la mettant d'abord sous la forme

$$(\mathrm{B}x + \mathrm{D})\, y + \mathrm{E} + \mathrm{F} = 0$$

et posant

$$\mathrm{B}x + \mathrm{D} = \mathrm{B}x', \; x = x' - \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{B}},$$

on a, pour première transformation

$$\mathrm{B}x'y + \mathrm{E}x' - \frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{B}} + \mathrm{F} = 0;$$

en posant dans cette dernière

$$\mathrm{B}y + \mathrm{E} = \mathrm{B}y', \; y = y' - \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{B}},$$

on réduit finalement l'équation (b) à la forme

$$\mathrm{B}x'y' + \mathrm{F}' = 0 \qquad \text{(k)}$$

dans laquelle on a, pour abréger,

$$\mathrm{F}' = \frac{\mathrm{BF} - \mathrm{ED}}{\mathrm{B}}.$$

7. Les réductions ultérieures des équations (g) et (h) ne peuvent se faire qu'en changeant les directions des axes à la nouvelle origine. Posons, pour cet effet, dans l'équation (d), $h = 0$, $k = 0$, $\mathrm{D} = 0$, $\mathrm{E} = 0$ et remplaçons F par F′ : nous aurons la transformée de (g), savoir

$$\frac{\mathrm{A}t'^2 + \mathrm{B}t' + \mathrm{C}}{u'^2}\, y^2 + \frac{\mathrm{A}t^2 + \mathrm{B}t + \mathrm{C}}{u^2}\, x^2 +$$
$$\frac{2\mathrm{A}tt' + \mathrm{B}(t + t') + 2\,\mathrm{C}}{uu'}\, xy + \mathrm{F}' = 0. \qquad \text{(l)}$$

On peut faire disparaître le produit xy, en posant

$$2\mathrm{A}tt' + \mathrm{B}\,(t + t') + 2\,\mathrm{C} = 0. \qquad \text{(m)}$$

Comme cette seule condition laisse indéterminées les directions t et t' et comme, en donnant à t une valeur quelconque, il n'en résulte qu'une valeur unique pour t' et réciproquement; on voit qu'il y a une infinité de systèmes d'axes, pour lesquels la transformée (*l*) peut être dépourvue de son terme en xy. On nomme conjugués les axes dont les directions remplissent la condition (m).

8. Cherchons les directions t et t' des axes conjugués, comprenant un angle quelconque, dont nous représenterons la tangente trigonométrique par v. On aura d'abord

$$v = \frac{(t - t') \sin \theta}{1 + (t' + t) \cos \theta + tt'}; \quad (1)$$

d'où éliminant t ou t', à l'aide de l'équation (m),

$$\left.\begin{array}{l} [2A \sin \theta - (2A \cos \theta - B)\, v]\, t^2 + \\ 2\, [B \sin \theta - (A - C)\, v]\, t + \\ 2C \sin \theta - (B - 2C \cos \theta)\, v \end{array}\right\} = o \quad (2)$$

ou

$$\left.\begin{array}{l} [2A \sin \theta + (2A \cos \theta - B)\, v]\, t'^2 + \\ 2\, [B \sin \theta + (A - C)\, v]\, t' + \\ 2C \sin \theta + (B - 2C \cos \theta)\, v \end{array}\right\} = o. \quad (3)$$

On a donc deux valeurs pour chacune des directions t et t' ; partant, deux systèmes d'axes conjugués, comprenant un angle donné.

Voici les faits isolés, qu'il est utile de connaître, avant de s'occuper de la discussion des valeurs des quantités v, t et t'.

1°. L'équation (m) et celles ci-dessus (1) (2) et (3) ne contenant que trois quantités v, t et t', sont nécessairement telles que chacune d'elles peut servir, à son tour, d'équation de condition aux trois autres.

2°. En représentant les racines de (2) par t_1 et t_2 et celles de (3) par t'_1 et t'_2, on peut aisément prouver que d'une part $t_1 + t_2$, $t_1 t_2$ et d'autre $t'_1 + t'_2$, $t'_1 t'_2$ ne satisfont point à la condition (m) ; et, par conséquent, que ces racines ne sont pas les directions des axes conjugués.

3°. On peut changer l'équation (2) en (3), en changeant v en $-v$. Si l'on veut que ce changement se fasse par suite des valeurs continues attribuées à v, dans l'une de ces équations, il y a deux manières d'y procéder, savoir : en fesant passer v soit par o, soit par ∞.

4°. En posant $v = o$, les équations (2) et (3) deviennent

$$At^2 + Bt + C = o, \quad At'^2 + Bt' + C = o,$$

de sorte qu'en les combinant avec celles en (m) et (1), on trouvera $t = t'$. On remarquera, en passant, que les racines de t et t' ne sont réelles, et par conséquent le passage de v par zéro n'est possible, que lorsque le binome $B^2 - 4AC$ est positif.

5°. En posant $v = \infty$ les équations (2) et (3) se réduisent à une seule

$$(2A \cos \theta - B)\, t^2 + 2\, (A - C)\, t + B^2 - 2\, C \cos \theta = o,$$

dont les racines satisfont à la condition (m) et sont par conséquent les directions des axes conjugués. Delà il résulte qu'il n'y a qu'un système

d'axes conjugués rectangulaires. En résolvant cette dernière équation par rapport à t, on trouve

$$2A\cos\theta-B)t=-(A-C)\pm\sqrt{[(A-C)^2+(2A\cos\theta-B)(2C\cos\theta-B)]}$$

expressions, dont la quantité affectée du radical peut se mettre sous cette forme

$$B^2+(A+C)\cos\theta.B+(A+C)^2-4AC\sin\theta$$

qui ne peut se décomposer qu'en facteurs imaginaires par rapport à B. Par conséquent ces expressions de t sont toujours réelles, quels que soient la constante B et le binome B^2-4AC. D'où il résulte que, le passage de v par ∞ est généralement possible, tandis que celui de la même quantité v par o ne l'est que lorsque le binome $B^2-4AC>0$, ci-dessus 4°.

6° En représentant par i, i' les angles que les directions t et t' peuvent faire avec l'axe des x, on aura, comme on sait:

$$t=\frac{\sin i}{\sin(\theta-i)},\quad t'=\frac{\sin i'}{\sin(\theta-i')};$$

de sorte que t et t' peuvent aussi changer de signes, soit en passant par zéro, soit par l'infini.

Venons-en maintenant à la discussion des valeurs de v, t et t'.

En résolvant les équations (2) et (3) par rapport à v, on trouve

$$\left.\begin{aligned} v&=\frac{2(At^2+Bt+C)\sin\theta}{(2A\cos\theta-B)t^2+2(A-C)t+(B-2C\cos\theta)}\\ v&=-\frac{2(At'^2+Bt'+C)\sin\theta}{(2A\cos\theta-B)t'^2+2(A-c)t'+(B-2C\cos\theta)}\end{aligned}\right\}(4).$$

Cela posé, nous aurons deux cas à considérer dans la discussion des valeurs de v: ou v change de signe en passant seulement par ∞, ou bien en passant en même temps par ∞ et par o.

Occupons-nous d'abord du premier de ces deux cas.

On sait, qu'un trinome du second degré conserve toujours le même signe pour des valeurs particulières de la variable, ces valeurs étant comprises entre celles qui rendent le trinome zéro, et qu'il change de signe, pour des valeurs particulières de la variable, qui excèdent les limites de son passage par zéro. Le trinome At^2+Bt+C ne pouvant changer de signe, dans le cas qui nous occupe, ci-dessus 4°, le changement du signe de v ne peut nécessairement provenir que du dénominateur de son expression. Cela posé, si l'on veut que v soit de même signe, dans les expressions (4), il faut et il suffit que t étant

pris en dedans des limites qui rendent v infini, t' soit en dehors de ces limites, ou réciproquement. Si l'on observe maintenant que l'expression (1) de v et celles ci-dessus (4) doivent fournir une même valeur pour v; on en conclura aisément que v se comporte à l'égard de t et t' de telle manière : que si t est en dedans, t' est en dehors des limites qui rendent v infini, ou réciproquement.

Lorsque v peut passer en même temps par o et par ∞, par suite du binome $B^2 - 4AC > o$, voici les circonstances qu'on peut remarquer dans la construction de t et t'. En supposant d'abord qu'une valeur de t rende v positif, dans la première des expressions (4), il suffit que t' rende les deux termes de la seconde des expressions (4) de signes contraires; ce qui exige que t et t' étant pris en dehors de l'une des deux limites qui rendent v égal à zéro, n'excèdent pas les limites qui rendent v infini. Ces considérations démontrent qu'entre les deux limites qui rendent v infini, il ne se trouve qu'une seule limite qui rende v égal à zéro, et réciproquement.

Comme on change l'équation (2) en (3) en changeant v en $-v$, il en est de même des valeurs particulières de t et t'; de sorte que les racines correspondantes aux mêmes signes des radicaux des équations (2) et (3) sont les directions des axes conjugués.

9. Pour abréger la discussion des valeurs de v, t et t', il faut rendre la question des axes conjugués indépendante des limites du passage de v par zéro ou par infini.

Cherchons, pour cet effet, la transformée aux axes conjugués rectangulaires. En prenant, pour les directions t et t' de la transformée (1), les racines de l'équation

$$(2A\cos\theta - B)t^2 + 2(A - C)t + (B - 2C\cos\theta) = o \qquad (1)$$

on a vu, n° 8, 3° que la condition (m) en est satisfaite; par suite de cette hypothèse, (1) prend la forme

$$My^2 + Nx^2 + F' = o \qquad (n)$$

dans laquelle, on a, pour abréger,

$$\frac{At'^2 + Bt' + C}{t'^2 + 2t'\cos\theta + 1} = M, \quad \frac{At^2 + Bt + C}{t^2 + 2t\cos\theta + 1} = N.$$

M et N doivent être tels, qu'en résolvant ces équations par rapport à t' et t, on n'ait que des valeurs uniques pour chacune de ces dernières quantités; car autrement, on aurait deux valeurs différentes pour t' et autant pour t, en tout quatre valeurs propres à satisfaire à l'équation ci-dessus (1) : ce qui est impossible. En résolvant l'équation en (M) par rapport à t', on a

$$2(A-M)t' = -(B-2M\cos\theta) \pm \sqrt{[(B-2M\cos\theta)^2 - 4(A-M)(C-M)]}$$

équation qui ne peut donner une valeur unique à t', à moins que son radical ne devienne nul par lui-même. Cela posé, on aura d'une part

$$2(A-M)t' = -(B-2M\cos\theta),$$

et d'autre part

$$4\sin^2\theta . M^2 - 4(A+C-B\cos\theta)M - (B^2-4AC) = o \quad (2).$$

La première de ces équations donne t' en fonction de M; la seconde détermine M. On trouve le même résultat pour N. Comme M et N d'ailleurs sont des quantités différentes, puisque t et t' le sont par hypothèse; on voit que cela ne se peut faire qu'en supposant que M et N soient les racines de l'équation ci-dessus (2), savoir :

$$2\sin^2\theta . M = (A+C-B\cos\theta) + \sqrt{[(A+C-B\cos\theta)^2 + (B^2-4AC)\sin^2\theta]},$$

$$2\sin^2\theta . N = (A+C-B\cos\theta) - \sqrt{[(A+C-B\cos\theta)^2 + (B^2-4AC)\sin^2\theta]},$$

10. En posant $B = o$ et remplaçant A et C par M et N, dans l'équation (I), on aura une transformée relative à (n), savoir :

$$\frac{Mt'^2 + N}{u'^2} y^2 + \frac{Mt^2 + N}{u^2} x^2 + \frac{Mtt' + N}{u.u'} . 2xy + F' = o; \ (o)$$

t et t' désignant actuellement les tangentes trigonométriques des angles que les nouveaux axes font avec celui des axes conjugués rectangulaires de la transformée (u) qu'on prend pour axe des x. On fera disparaître le produit xy de la transformée (o), en posant

$$M t t' + N = o \qquad (1).$$

La tangente trigonométrique de l'angle compris, par les directions t et t', étant désignée par v, on a

$$v = \frac{t - t'}{1 + tt'} \qquad (2),$$

et éliminant t',

$$Mt^2 - v(M-N)t + N = o \quad (3)$$

équation, dont les racines t_1 et t_2 sont

$$2Mt = (M-N)v \pm \sqrt{[(M-N)^2 v^2 - 4MN]} \quad (4).$$

Il est aisé de prouver que t_1 et t_2 ne satisfont pas à la condition (1) et (2), ci-dessus, et par conséquent qu'ils ne sont pas les directions des axes conjugués. Pour trouver les conjuguées des directions t, il faut changer v en $-v$, et l'on aura

$$2\,\mathrm{M}t' = -(\mathrm{M}-\mathrm{N})\,v \pm \sqrt{[(\mathrm{M}-\mathrm{N})^2 v^2 - 4\,\mathrm{MN}]} \quad (5).$$

En représentant les racines de t' par t'_1 et t'_2, on trouvera que les racines des équations (4) et (5) ci-dessus, qui correspondent au même signe du radical, sont les directions des axes conjugués, puisqu'elles satisfont aux conditions ci-dessus (1) et (2).

La discussion des équations (4) et (5) ci-dessus confirmerait les résultats généraux, auxquels nous sommes parvenu, n° 8.

11. En résolvant l'équation (2) du n° 8, par rapport à t,

$$[(2\,\mathrm{A}\cos\theta - \mathrm{B})\,v - 2\,\mathrm{A}\sin\theta]\,t = -(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,v + \mathrm{B}\sin\theta$$
$$\pm \sqrt{\left\{[(\mathrm{A}-\mathrm{C})^2 + (2\,\mathrm{A}\cos\theta - \mathrm{B})(2\,\mathrm{C}\cos\theta - \mathrm{B})]\,v^2 + (\mathrm{B}^2 - 4\,\mathrm{AC})\sin\theta^2\right\}};$$

on voit que l'angle compris par les axes conjugués ne peut être quelconque, puisqu'en donnant à v une valeur particulière, il se pourrait que la quantité qui se trouve sous le radical, devenant négative, rendît t imaginaire.

D'abord, v peut être un minimum, si en égalant la quantité affectée du radical à zéro; l'équation

$$[(\mathrm{A}-\mathrm{C})^2 + (2\,\mathrm{A}\cos\theta - \mathrm{B})(2\,\mathrm{C}\cos\theta - \mathrm{B})]\,v^2 + (\mathrm{B}^2 - 4\,\mathrm{AC})\sin^2\theta = 0$$

et qui est la même chose que celle qui suit

$$[(\mathrm{A}+\mathrm{C}-\mathrm{B}\cos\theta)^2 + (\mathrm{B}^2 - 4\,\mathrm{AC})\sin^2\theta]\,v^2 + (\mathrm{B}^2 - 4\,\mathrm{AC})\sin^2\theta = 0,$$

ne donne que des valeurs réelles pour v. Pour que v soit réel, il faut que $\mathrm{B}^2 - 4\,\mathrm{AC}$ étant < 0, le coëfficient de v^2 soit positif. Or, on a vu, n° 8, 5°, que le coëfficient de v^2 est essentiellement positif, quel que soit le binome $\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC}$. Delà il résulte que v^2 ne peut être un minimum, autre que zéro, que lorsque la binome $\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC}$ est un nombre négatif.

En recourant à l'équation (2) du n° 9, dont nous avons représenté les racines par M et N, on a

$$\mathrm{M}+\mathrm{N} = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{C}-\mathrm{B}\cos\theta}{\sin^2\theta}, \quad \mathrm{MN} = -\frac{\mathrm{B}^2 - 4\,\mathrm{AC}}{4\sin^2\theta};$$

de sorte qu'en introduisant ces relations dans l'expression de v^2, ci-dessus, il vient

$$v^2 = \frac{4\,\mathrm{MN}}{(\mathrm{M}+\mathrm{N})^2 - 4\,\mathrm{MN}} = \frac{4\,\mathrm{MN}}{(\mathrm{M}-\mathrm{N})^2}. \quad (1)$$

Cette expression de v^2 fait voir que l'angle minimum des axes conjugués, peut être constant ou droit, si $\mathrm{M} = \mathrm{N}$, c'est-à-dire si les

racines de l'équation (2) du n° 9 sont égales. Cette circonstance exige que le radical de l'expression de M et N soit zéro, savoir

$$(A + C - B\cos\theta)^2 + (B^2 - 4\,AC)\sin^2\theta = o \qquad (2).$$

Observons d'abord que les constantes A, B, C et θ étant des nombres donnés à priori, l'équation qui les lie doit être telle qu'on n'ait que des valeurs uniques pour chacune d'elles. D'ailleurs, en résolvant l'équation (2) par rapport à B, on ne trouve que des racines imaginaires pour B, savoir :

$$B = (A + C)\cos\theta \pm (A - C)\sin\theta.\sqrt{-1}\,;$$

Ce qui fait voir que la condition (2) ne peut subsister à moins qu'on n'ait séparément

$$A = C \quad , \quad B = 2\,A\cos\theta.$$

Telles sont les relations entre les constantes A, B et C de l'équation (a), dans le cas où l'angle compris par les axes conjugués est constant ou droit. (a) devient dans ce cas l'équation :

$$Ay^2 + 2\,A\cos\theta.\,xy + Ax^2 + Dy + Ex + F = o. \ (p)$$

En divisant tous les termes de cette équation par A et posant les rapports

$$D : A = a,\ E : A = b,\ F : A = c$$

elle devient

$$y^2 + 2\cos\theta\, xy + x^2 + ay + bx + c = o. \qquad (p')$$

En procédant, comme au n° 2, on trouvera

$$m = -4\sin^2\theta \quad , n = 2(a\cos\theta - b),$$

$$n' = 2\,(b\cos\theta - a)\,,\ s = a^2 - 4\,c.$$

Partant, n° 4, si l'on transporte la nouvelle origine au point

$$h = -\ \frac{2\,(4\cos\theta - b)}{4\sin^2\theta}\,, k = -\frac{2\,(b\cos\theta - a)}{4\sin^2\theta}\,,$$

la transformée (p') prendra la forme

$$y^2 + 2\cos\theta.\,xy + x^2 - \frac{(a\cos\theta - b)^2 + \sin^2\theta\,(a^2 - 4c)}{4\sin^2\theta} = o\ (p'')$$

La valeur de t correspondant à v^2 minimum étant unique, savoir :

$$t' = \frac{B\sin\theta - (A - C)\,v}{(2\,A\cos\theta - B)\,v - 2\,A\sin\theta}\,;$$

on trouve son conjugué t' en changeant v en $-v$, savoir :

$$t' = -\frac{B\sin\theta + (A - C)v}{(2A\cos\theta - B)v + 2A\sin\theta}$$

En substituant ces expressions de t et t', dans la transformée (l), elle devient

$$M'y^2 + N'x^2 + F' = o, \qquad (q)$$

dans laquelle on a, pour abréger,

$$\frac{At'^2 + Bt' + C}{t'^2 + 2t'\cos\theta + 1} = M', \quad \frac{At^2 + Bt + C}{t^2 + 2t\cos\theta + 1} = N'.$$

En substituant dans N' la valeur ci-dessus de t, il vient

$$N' = \left\{ \frac{\begin{array}{l} A\,[(A-C)^2 + (2A\cos\theta - B)(2C\cos\theta - B)]\,v^2 + \\ + (B^2 - 4AC)\sin\theta\,(2A\cos\theta - B)\,v + \\ - A\sin^2\theta\,(B^2 - 4AC) \end{array}}{\begin{array}{l} [(A - C)^2 + (2A\cos\theta - B)(2C\cos\theta - B)]\,v^2 + \\ - 2\sin\theta\,(2A\cos\theta - B)(A + C - B\cos\theta)\,v + \\ + 4A\sin^2\theta\,(A + C - B\cos\theta) \end{array}} \right.$$

En y substituant la valeur ci-dessus de v^2, on a

$$N' = -\frac{B^2 - 4AC}{2(A + C - B\cos\theta)}$$

Comme M' s'obtient, en changeant v en $-v$, on a nécessairement $M' = N'$, savoir :

$$M' = N' = -\frac{B^2 - 4AC}{2(A + C - B\cos\theta)} = \frac{2MN}{M + N}$$

12. Lorsque la binome $B^2 - 4AC$ est positif, v ne peut être un minimum différent de zéro, mais un minimum égal à zéro : c'est ce qui le rend indépendant de toute relation particulière entre les constantes de l'équation (a). Ce fait caractérise la seconde série des transformées relatives à l'équation (l). Ainsi v peut prendre toutes les valeurs possibles, depuis zéro jusqu'à l'infini, sans rendre jamais (t), n° 11, imaginaire. Il y a donc, dans le cas de $B^2 - 4AC > o$, des axes conjugués, comprenant un angle quelconque, depuis zéro jusqu'à 180°.

En posant $v = o$, dans l'équation en t, n° 10, on trouve

$$-2At = -B \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)} \qquad (1)$$

c'est-à-dire deux directions, suivant lesquelles se dirigent les axes conjugués comprenant l'angle zéro ; ce qui résulte de ce que les deux

systèmes d'axes conjugués, n° 8, se confondent ici deux à deux avec deux droites, dont nous venons de trouver les directions ci-dessus (1), et qui ne sont autre chose d'ailleurs que les racines de l'équation $At^2 + Bt + C = 0$

Les droites doubles, dont les directions sont données ci-dessus (1), ont reçu le nom d'assymptotes, à cause d'autres propriétés que celles que nous venons de leur trouver.

En prenant les assymptotes pour les axes de la transformée (l), on lui donnera la forme suivante :

$$B'.xy + F' = 0, \qquad (r)$$

dans laquelle

$$B'.\sqrt{[(A+C-B\cos\theta)^2 + (B^2-4AC)\sin^2\theta]} = -(B^2-4AC),$$

ou bien en nous servant des coëfficients (n),

$$B'.(M-N) = -4MN.$$

La tangente trigonométrique de l'angle compris par les assymptotes étant représentée par v, on trouve

$$v = \frac{\sin\theta\sqrt{(B^2-4AC)}}{A+C-B\cos\theta}.$$

On voit que l'angle compris par les assymptotes ne peut être zéro, puisque le binome B^2-4AC est positif quelconque. Mais il peut être droit, lorsque la relation entre A, B, C et θ est telle qu'on ait

$$A + C - B\cos\theta = 0.$$

La transformée (r), que nous venons de trouver, a la même forme que celle en (k), issue de (b). On peut aussi ramener l'équation (k) ou (r) à la forme (l). Pour cet effet, il suffit de poser en (l), $A=0$, $C=0$, et l'on aura la transformée relative à (*k*), savoir :

$$\frac{Bt'}{u'^2}.y^2 + \frac{Bt}{u^2}.x^2 + \frac{B(t+t')}{uu'}.xy + F' = 0. \qquad (s):$$

Le produit xy de cette équation disparaît pour $t + t' = 0$: ce qui prouve que l'une des assymptotes divise la sécante parallèle à l'autre et comprise par les axes conjugués en deux parties égales.

En joignant à la condition $t + t' = 0$, cette autre $1 + (t + t')\cos\theta + tt' = 0$, qui exprime que l'angle compris, par les axes conjugués, est droit ; on trouve, en éliminant t', $t^2-1 = 0$, d'où $t = \pm 1$, $t' = \pm 1$. Bien, qu'il y ait deux systèmes d'axes conjugués rectangulaires, ces deux systèmes se confondent en un seul.

En désignant par i l'angle que l'un des axes conjugués fait avec l'une des assymptotes, prise pour axe des x, on aura, à cause de $t = 1$, $t.\sin(\theta - i) = \sin i$, $\theta = 2i$. Cela posé, la transformée (s), dans le cas des axes conjugués rectangulaires, devient :

$$B\left(-\sin^2\tfrac{1}{2}\theta.\,y^2 + \cos^2\tfrac{1}{2}\theta.\,x^2\right) + F'.\sin^2\theta = 0. \qquad (t)$$

Tant que l'angle θ des assymptotes demeure quelconque, les coëfficients de x^2 et y^2, dans l'équation (t), sont inégaux et de signes contraires ; et ce n'est que dans le cas de $\theta = 90°$, que ces coëfficients deviennent égaux et de signes opposés.

13. Il nous reste encore à nous occuper des transformées relatives à l'équation (a), dans le cas de $m = B^2 - 4AC = 0$.

On a vu, n° 6, qu'on peut en changeant l'origine réduire l'équation (a), dans le cas de $B^2 - 4AC = 0$, à la forme (h). Cela posé, changeons les directions des axes à la nouvelle origine, et nous aurons l'équation, telle que

$$\frac{At'^2 + Bt' + C}{u'^2}\,y^2 + \frac{At^2 + Bt + C}{u^2}\,x^2 +$$

$$\frac{2Att' + B(t + t') + 2C}{u.\,u'}.\,xy + \frac{E'x}{u} + \frac{Ey}{u'} = 0. \qquad (u).$$

Le produit xy de cette équation disparaît, en posant

$$2Att' + B(t + t') + 2C = 0.$$

Or, en résolvant cette équation par rapport à t, on trouve

$$t = -\frac{2C + Bt'}{2At' + B} = -\frac{B}{2A}.\frac{t' + \frac{2C}{B}}{t' + \frac{B}{2A}} = -\frac{B}{2A}$$

à cause de $\frac{2C}{B} = \frac{B}{2A}$ ou $B^2 - 4AC = 0$. On voit donc que l'un des axes conjugués est constant et indépendant de l'autre, qui peut être quelconque.

En laissant subsister l'ancien axe des y, ce qui se fait en posant $t' = \infty$, et prenant pour le nouvel axe des x, la droite dont la direction est $t = -\frac{B}{2A}$, on ramènera aisément l'équation (u) à

$$BC.\,y^2 + E'x.\sqrt{(B^2 + 4C^2 - 4BC.\cos\theta)} = 0. \qquad (v)$$

L'angle compris, par les axes conjugués actuels, est donné par la tangente trigonométrique

$$v = \frac{2A}{B-2C\cos\theta} = -\frac{1}{t + \cos\theta}$$

Il se peut que cet angle soit droit, lorsque la relation entre les constantes A, B et C est telle, qu'on ait

$$t = -\cos\theta = \frac{B}{2A}.$$

S'il ne l'est pas pour l'axe des x, prenons la droite, dont la direction est $t = -\frac{B}{2A}$; dirigeons l'axe des y suivant une perpendiculaire à cette dernière, et au lieu de nous occuper de la transformée (v), partons de celle en (d) et proposons-nous de trouver la transformée aux axes conjugués rectangulaires, dans le cas qui nous occupe.

D'abord, en combinant l'équation $2\,At = B$, avec cette autre $1 + (t + t)\cos\theta + tt' = o$, qui exprime que les axes dont on fait choix sont rectangulaires; on trouvera

$$t' = -\frac{2A - B\cos\theta}{2A\cos\theta - B}.$$

Cela posé, mettons l'équation (d) sous la forme

$$My^2 + Nx^2 + Pxy + Qy + Rx + S = o.$$

En posant $t = -\frac{B}{2A}$, les termes en xy et x^2 disparaissent et il ne reste plus qu'à déterminer les coëfficients M, Q, R et S. D'abord, le coëfficient de x, à cause de $t = -\frac{B}{2A}$, se réduit à

$$R = -\frac{BD - 2AE}{\sqrt{(B^2 + 4A^2 - 4AB\cos\theta)}}.$$

Le coëfficient de y^2, ou

$$M = \frac{At'^2 + Bt' + C}{t'^2 + 2t'\cos\theta + 1},$$

ne pouvant subsister qu'à condition qu'il donne une valeur unique pour t', on trouvera, en employant le procédé du N° 8,

$$\sin^2\theta . M = A + C - B\cos\theta = 0,$$

$$2(A\cos^2\theta + C - B\cos\theta)\,t' = B^2 + B\cos^2\theta - 2\cos\theta\,(A + C).$$

Comme cette dernière équation peut se mettre sous la forme

$$2(\cos\theta.\sqrt{A} - \sqrt{C})^2 t = -2(\cos\theta.\sqrt{A} - \sqrt{C})(\sqrt{A} - \cos\theta.\sqrt{C})$$

on voit qu'on a

$$t' = -\frac{\sqrt{A} - \cos\theta.\sqrt{C}}{\cos\theta\sqrt{A} - \sqrt{C}} = -\frac{2A - B\cos\theta}{2A\cos\theta - B},$$

valeur conforme à celle que nous avons trouvée précédemment.

Il nous reste encore à disposer des coëfficients Q et S, pour ramener l'équation (d) à la forme

$$My^2 + Rx = 0 : \qquad (x)$$

ce qui se fera en posant

$$(2Ak + Bh + D)\,t' + 2Ch + Bk + E = 0,$$

$$Ak^2 + Bkh + Ch^2 + Dk + Eh + F = 0.$$

En substituant pour t' sa valeur ci-dessus et en observant que les trois premiers termes de la seconde équation peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{1}{4A}(2Ak + Bh)^2,$$

on peut remplacer les équations précédentes, par les suivantes :

$$2(A + C - B\cos\theta)(2Ak + B) = E(2A\cos\theta - B) - D(2A - B\cos\theta),$$

$$(2Ak + Bh)^2 + 4A(Dk + Eh + F) = 0.$$

En combinant encore ces deux dernières, on trouvera

$$2Ak + Bh = \frac{E(2A\cos\theta - B) - D(2A - B\cos\theta)}{2(A + C - B\cos\theta)}$$

$$Dk + Eh = -F - \frac{[(2A\cos\theta - B) - D(2A - B\cos\theta)]^2}{16A(A + C - B\cos\theta)^2},$$

équations qui déterminent la nouvelle origine (h, k). On a donc tous les éléments nécessaires pour construire la transformée (x). Partant, sa forme explicite est

$$y^2 - \frac{(BD - 2AE)\sin^2\theta}{2\sqrt{A}(A + C - B\cos\theta)^3}.x = 0$$

Note. Le mot de direction d'une droite, dans le sens que nous y avons attaché dans ce mémoire, a d'abord été employé par M. Brasseur dans un cours de géométrie analytique lithographié et puis par M. Noël dans son cours de géométrie analytique.

IX. *Mémoire sur quelques nouveaux appareils électro-magnétiques et leur emploi*,

par M. GLOESENER,

Professeur à l'Université de Liége.

Planche 5.

§ I.

PAN-ÉLECTRO-MAGNETICUM OU PAN-ÉLECTRO-MAGNÉTIQUE.

I. Je donne ce nom à un appareil simple et d'un petit volume, au moyen duquel on peut démontrer complètement tous les phénomènes électro-magnétiques et électro-dynamiques, c'est-à-dire tous ceux que l'on peut produire par l'action réciproque d'un courant électrique et d'un aimant, et par celle de deux courants électriques.

La figure 1 représente l'appareil même, et les autres figures en indiquent les parties accessoires.

D D est un disque en acajou ou autre bois sec de 2 à 3 centimètres d'épaisseur et de 24 à 25 centimètres de diamètre, percé à son centre d'un trou circulaire, auquel on ajuste une tige de 3 millimètres de diamètre, recourbée à angle droit en dessous du disque et munie d'une vis de pression, tandis qu'à l'autre extrémité on visse à volonté une petite coupe ou capsule en cuivre C ou bien une grosse tige en cuivre, d'un centimètre de longueur, terminée par une petite coupe.

La capsule C, qui peut être enlevée et remplacée par la colonne O O, est entourée d'un tube de verre très-court *t* auquel est mastiqué un godet en cuivre C′ qui communique par un fil à travers le disque D D avec la vis de pression *c*′, de telle sorte qu'un petit fil de cuivre plongeant par ses deux bouts dans du mercure en C et C′, un courant électrique qui entrerait par C reviendrait par C′ et vice-versa.

A la circonférence du disque est creusée une rigole circulaire R R R, qui peut recevoir du mercure et communiquer avec une pile

galvanique à l'aide d'un fil *r* en cuivre, muni d'une vis de pression *r'*.

Le disque est porté sur trois vis à caler V V V et porte à son tour deux bandes de cuivre S et S, dans lesquelles on insère deux colonnes cylindriques en bois E et E, maintenues par une barre prismatique K. Celle-ci est percée dans son milieu et traversée par un tuyau en cuivre P P P, à l'extrémité supérieure duquel on ajuste une pièce en cuivre avec deux montants *b* et *b* sur lesquels repose un fil en cuivre aplati en *e*. Autour de celui-ci s'enroule un fil de soie ou un assemblage de fils de soie non tordue traversant le tuyau et ayant un crochet en cuivre à son extrémité *a*. Au bas du tuyau sont adaptées deux coupes en cuivre, l'une C″ soudée à sa surface extérieure et l'autre C‴ mastiquée à un tube en verre Y Y, glissant sur le tuyau P P afin de pouvoir écarter à volonté les deux coupes C‴ et C″ l'une de l'autre. La coupe C‴ communique, à l'aide d'un fil *q*‴ longeant le tube et portant à son extrémité un petit godet rempli de mercure, avec l'un des pôles d'une pile voltaïque, tandis que le tuyau même recevra l'électricité de l'autre pôle par le fil *q*″ et la conduira dans la coupe C″ également remplie de mercure.

A la colonne E se trouve un cylindre mobile A′ avec vis de pression auquel est ajusté un gros fil de cuivre *a′a″*; celui-ci porte un pivot *b* à sa surface supérieure, un fil recourbé et terminé en pointe *b′* à sa surface inférieure et un axe horizontal *p′ p″* de manière qu'on peut placer successivement une aiguille aimantée sur les pivots *b* et *b′* et une aiguille se mouvant dans un plan vertical sur les deux extrémités de l'axe p′ p″.

Une bande en cuivre S′, fixée en dessous du disque D D, porte un montant *g* en bois, dans lequel on insère une colonne prismatique en bois F, de manière à ce que, maintenue en haut par la traverse K′, elle puisse tourner autour de son axe X X.

Une pièce en cuivre G mobile sur la colonne F peut être fixée à toute hauteur à l'aide de la vis de pression *v*: on y visse une tige en cuivre H traversée en *h* par une vis *t′ v′*. Celle-ci présente à son extrémité inférieure une petite concavité dans laquelle on fixe une chape d'agate ou d'acier dur: elle est entourée d'un tube en verre *t′* auquel on mastique le godet en cuivre G′, où plonge le conducteur $c_1\, c^1$ fixé à la tige H, et longeant le tube de manière à ce qu'il ne puisse empêcher la rotation du petit arc en cuivre *c*″, qui communique avec une des extrémités d'un conducteur mobile, l'autre étant en communication avec la capsule C′, comme on le voit figure 1.

L'appareil que je viens de décrire a sur tous les autres destinés au même usage plusieurs avantages précieux: 1° il réunit plusieurs appareils en un seul et coûte beaucoup moins; 2° il sert aussi pour toutes les expériences de rotation sans parties accessoires et rend possibles dans tous les sens les mouvements des conducteurs mobiles qui s'arrêteront dans des positions fixes, avantage réel, qu'aucun appareil de ce genre ne possède; 3° l'appareil permet de suspendre toutes les figures qui devront se mouvoir et est, par conséquent, comme plusieurs expériences me l'ont démontré, plus sensible que si les conducteurs mobiles devaient se mouvoir sur des pivots. La différence, qui est assez grande, peut être reconnue, si le même conducteur traversé par le même courant est disposé de manière à pouvoir être fixé sur son axe au moyen de la colonne triangulaire en bois F figure 1.

Voici maintenant la manière de se servir de l'appareil:

1° *Action d'un conducteur fixe sur un aimant mobile.*

Pour produire les déviations de l'aiguille aimantée au moyen d'un conducteur électrique fixe, on placera les aiguilles successivement sur les pivots *b*, *b'*, *p'* et *p''* et l'on conduira le courant d'une pile voltaïque par *a'''* vers *a''*, et delà vers l'autre pôle de la pile ou vice-versa. On verra aussitôt les phénomènes indiqués pour la première fois par *Oersted* et conformes à la règle générale posée par *Ampère*. Le mode d'action d'un courant électrique vertical sur une aiguille horizontale peut être reconnu, si l'on présente successivement le conducteur de la pile, même tenue à la main, dans le sens vertical à chacun des pôles et dans toutes les positions possibles.

2° *Action d'un conducteur fixe sur un aimant mobile.*

Pour démontrer l'action d'un aimant fixe sur un conducteur mobile, on présente successivement l'un et l'autre pôle aux différentes faces d'un conducteur rectangulaire, qui est suspendu par un anneau en soie *b* au crochet *a*. Il est parfaitement équilibré et porte, pour ne pas osciller, une pointe *p'* plongeant dans la coupe C en même temps que ses deux pointes *a'* et *b'* sont immergées dans le mercure des coupes ou godets C'' et C''' sans s'appuyer sur les fonds; voir les figures 1, 2, 3. On voit aussi, que le courant est amené de la pile en C'' par la vis de pression *q''* à travers le tuyau P P et qu'il retourne à la pile en sortant de la coupe C''' et passant par le fil *q'''* ou vice-versa.

3° Action de la terre sur un courant circulaire ou rectangulaire vertical.

La figure 4 représente le conducteur mobile. C'est un fil de cuivre de $1\frac{1}{2}$ millimètre de diamètre, isolé par de la soie et plié 10 à 12 fois sur lui-même, les deux bouts restant séparés et à nu, et plongeant l'un dans la coupe C et l'autre dans celle C′, tandis que le fil est suspendu au crochet *a*. Ou bien l'un des bouts est recourbé et immergé dans le mercure en C″, et l'autre dans celui en C′. Une petite pointe va dans la coupe C sans reposer au fond pour empêcher les oscillations du conducteur, figure 5.

Enfin le fil pourra aussi reposer sur deux pointes *p* et *p′* situées dans la même ligne verticale et s'appuyant à la coupe C et à la chape du tube *t′*; les deux extrémités du fil plongeront, l'une dans la coupe C' et l'autre dans G′ remplies de mercure. Dans les trois cas le conducteur animé d'un courant électrique se mouvra avec une très grande facilité conformément à la loi connue, fig. 6.

4° Rotation d'un conducteur mobile par un aimant fixe.

On peut réaliser ce phénomène de plusieurs manières : si l'on suspend le conducteur figure 7 en *a* au crochet *a*, fig. 1, que le bout *p*' plonge dans le mercure en C et le bout *p* dans celui en C", le courant électrique se divisera en deux parties égales, qui montent à la fois dans les deux branches verticales et sortent en C″, ou bien le mouvement du courant se fera en sens contraire. L'un ou l'autre pôle d'un aimant imprime au conducteur un mouvement de rotation continu dans un sens ou dans l'autre. On peut encore prendre une pièce en bois de 2 à 3 centimètres d'épaisseur et de 5 à 6 de diamètre. On y fait une large ouverture circulaire au centre, on creuse au bord une rainure annulaire d'un centimètre de profondeur et de $1\frac{1}{2}$ de largeur, on la divise en deux parties égales par deux petites cloisons isolantes concaves à leur milieu, (figure 8) on verse du mercure à hauteur égale dans les deux compartiments, on fixe ce godet au centre du disque D D et on suspend le conducteur (figure 9) au crochet *a* par l'anneau de soie *b*, tandis que l'axe isolé *pp′* passe dans la coupe C. Les deux bouts *a′* et *b′* du conducteur plongeront l'un en A et l'autre en B du godet. La rotation commencera par l'action de l'un ou de l'autre pôle d'un aimant aussitôt que la pile communiquera avec le godet.

5° Rotation d'un aimant autour d'un conducteur fixe et vice-versa. Rotation d'un aimant autour de lui-même ou de son axe, et d'un

aimant et d'un conducteur liés ensemble autour de l'axe du premier. Un seul petit aimant suffit pour ces cas différents. On soude à l'aimant N S (figure 10) une petite capsule en cuivre M avec un crochet vertical M′ et on y fixe dans un petit trou un fil de fer recourbé N'. Veut-on maintenant que l'aimant tourne autour d'un conducteur fixe, on enlève la capsule ou coupe C (fig. 1), on y visse la colonne O O et on ajuste à l'aimant une traverse en cuivre T percée dans son milieu par un fil pointu *m*, dont un des bouts est suspendu au crochet *a*, l'autre plongeant dans la coupe M, après que l'on aura préalablement équilibré l'aimant par un contrepoids en plomb ou en cuivre; contrepoids, qui pourra être remplacé par un second aimant, comme on le voit (fig. 1). A un cylindre creux en cuivre G″ glissant sur la colonne E et tenu à l'aide d'une vis de pression *v*, on taraude une tige H", et à son extrémité *h*″ on soude un anneau en cuivre U U U, replié en bas et muni de trois petites vis, dans lequel on place un anneau en bois *dd*, en le remplissant en partie de mercure distillé. On réussira facilement à disposer le tout de manière que l'un des pôles de l'aimant soit plus près de la colonne conductrice O O que l'autre (ce qui est indispensable), et que la pointe du fil N' touche partout au mercure, sans y plonger, pendant qu'elle décrit une circonférence entière.

Dès que le courant électrique peut entrer dans la coupe C, il montera au travers de la colonne OO, passera dans la coupe M remplie de mercure; puis par la traverse T, dans l'aimant, et descendra par le fil N' dans le mercure de l'anneau *dd* et retournera par un conducteur dans la pile, en imprimant en même temps à l'aimant un mouvement de rotation continu, lequel changera de sens, aussitôt que le courant aura changé de direction.

Si à la place de la colonne O O, on fixe au disque D D un aimant vertical et que l'on suspende au dessus de celui-ci un fil conducteur recourbé et touchant par ses deux bouts au mercure dans l'anneau *dd*, il tournera autour de l'aimant (voir fig. 11). Le conducteur *a* A *q* est suspendu en A au crochet *a* figure 1, et maintenu à l'aide de la traverse *m* plongeant dans la cavité M'.

Pour faire tourner l'aimant autour de lui-même, on démonte la colonne O O, le contre-poids et la traverse T, et l'on suspend l'aimant par son crochet M′ (figure 10). On verse un peu de mercure dans la coupe M; et à la place du fil N′ on en met un autre, qui pourra toucher au mercure dans le godet *dd* et

l'on achèvera d'établir comme ci-dessus, la circulation du courant électrique. L'aimant tournera autour de lui-même avec vélocité, et son mouvement changera de sens avec la direction du courant, d'après la loi connue; mais l'aimant resterait en équilibre, s'il était traversé par le courant sur toute sa longueur. Pour empêcher les oscillations de l'aimant, on ajuste à son extrémité inférieure une pièce de cuivre, munie d'une pointe, qui plonge dans la coupe C, et au lieu de recevoir le courant de la capsule, le conducteur à la main, on place l'anneau A″ avec sa tige *a″ a‴* au-dessus de l'aimant, de telle sorte que le fil *nn′* plonge par sa pointe dans le mercure en M.

Si on liait à l'aimant un conducteur isolé communiquant par un côté avec la capsule M et par l'autre avec du mercure dans un godet d'un diamètre aussi petit qu'on peut le faire (figure 13), l'aimant et le fil tourneraient à la fois avec une grande rapidité et le sens du mouvement changerait, si le fil conducteur *a b d* au lieu de monter vers N, descendait vers S dans du mercure en C.

Ce phénomène est intéressant, parce qu'il semble indiquer que la rotation de l'aimant est due au courant électrique qui le parcourt, et non pas à la partie du courant dans le mercure, comme l'a admis *Ampère*; car le courant dans le mercure du godet ne change pas de direction dans les deux cas ci-dessus; mais bien celui, qui parcourt l'aimant en faisant corps avec lui. Ce phénomène paraît indiquer, que le magnétisme et le courant dans l'aimant, sont indépendants l'un de l'autre, ce que d'ailleurs les phénomènes magnéto-électriques rendent extrêmement probable.

On peut encore produire la rotation d'un aimant autour de lui-même et autour d'un axe parallèle au sien, sans faire passer le courant électrique par lui et sans employer du mercure, excepté une quantité minime pour la communication intime de l'électricité avec les conducteurs. La figure 14 représente ce petit appareil.

Deux fils de cuivre AB et A′B′ sont chacun deux fois recourbés à angle droit en *a* et *b*, en *a′* et *b′*, et soudés entre eux et à l'extrémité *q* d'une tige *qp*, taraudée en *p* à laquelle on a soudé une capsule C. Ces quatre fils sont à 90° les uns des autres et communiquent entre eux par les cercles M M′ M″ et N N′ N″. On visse cette figure sur le disque DD figure 1, et on suspend un aimant à son milieu. Le courant électrique entrant par M monte dans les quatre fils à la fois et sort par S ou S′, ou bien il entre par S et sort par S″, par S‴ ou S⁗, l'aimant tournera autour de lui-même et si on le suspend à côté de

la colonne *dq* comme la figure l'indique, il tournera autour de celle-ci. Les faces en regard de l'aimant représentent précisément les quatre faces différentes d'un même conducteur, celles-ci agissent successivement sur un aimant qui tourne autour du conducteur, tandis que les premières agissent simultanément. Si ce phénomène avait été découvert à l'origine de l'électro-magnétisme, il aurait conduit à supposer, que la force qui produit les phénomènes électro-magnétiques est une force de révolution dans un sens déterminé. Ce procédé de produire le mouvement de rotation d'un aimant et celui indiqué figure 7 pour produire la rotation continue d'un fil conducteur, sont plus simples et plus faciles que tous ceux connus pour atteindre le même but. On évite par là l'emploi du mercure, qui rend l'expérience plus longue, plus difficile et la fait même manquer s'il n'est pas pur.

6° *Rotation d'un conducteur horizontal par un aimant fixé, par la seule influence de la terre ou par un autre conducteur horizontal et circulaire.*

On suspend au crochet *a*, (figure 1) l'aiguille en cuivre (figure 16) ou plutôt l'aiguille multiplicateur, c'est-à-dire les aiguilles croisées fig. 17 ; le courant entrant par la capsule C dans l'aiguille (du centre vers les bords) et puis dans le mercure de la rainure RRR elle tournera par l'influence de l'un ou l'autre pôle d'un faible aimant et aussi par celle de la terre seule. Elle tournera aussi par l'influence d'un conducteur circulaire multiplicateur placé sur les bords du disque DD autour de la rainure et communiquant par ses deux bouts avec les deux pôles d'une pile.

7° *Action de la terre sur un conducteur vertical mobile.*

On fixe un anneau en bois d'un diamètre égal à celui du disque DD au point *h* à la place de la vis *v'* comme l'indique la figure 15. Les deux bouts des deux fils *mn* et *m'n'* communiquant avec l'anneau *d'd'* plongeront à la fois (ou un seul, si la pointe à charnière *dd'* est repliée) dans le mercure de la rainure RR et le mouvement du fil ou des fils aura lieu d'après la loi établie par Ampère.

8° *Action réciproque des courants électriques.*

Les figures 1, 2 et 3 montrent clairement comment les différents conducteurs mobiles, construits par Ampère, pourront être successivement suspendus au crochet *a* du fil de soie *f*. Ils seront mis en mouvement par l'action d'un conducteur fixe, qu'on leur présente à la main; ou bien on fait passer le courant électrique par la tige conductrice A' *a' a''* placée au-dessous de la partie horizontale du conducteur mobile et communiquant, à l'aide

d'un fil de cuivre, avec le fil q''; celui q''' reconduisant le courant vers le pôle négatif de la pile ou réciproquement, ou bien enfin autour des conducteurs mobiles 3, 4 ou 9, on en place un autre fixé verticalement contre un petit montant en bois vissé sur une plaque de plomb, qui porte deux coupes en bois remplies de mercure, où vont plonger les deux bouts du conducteur fixe; (figure 18).

Il imprimera à la figure 9 un mouvement de rotation continu et uniforme, et les autres conducteurs se mouvront conformément aux lois des actions des courants parallèles et angulaires.

Un conducteur circulaire plié 12 à 20 fois sur lui-même et placé sur la circonférence du disque D D, imprimera un mouvement de rotation aux conducteurs horizontaux (figures 16 et 17).

9° *Mouvement de rotation d'un conducteur vertical par l'action d'un conducteur horizontal.*

On se sert du conducteur circulaire horizontal de l'expérience précédente; on démonte la vis de pression v' au point h du conducteur Hh et l'on y visse l'anneau en bois $d'd'd'$ fig. 15. Après y avoir versé du mercure ainsi que dans la rainure, on y suspend les conducteurs verticaux comme on le voit fig. 1, la pointe à charnière dd' permet de faire passer le courant à volonté dans les deux branches verticales, ou dans une seule.

Afin d'éviter l'emploi du mercure on mettra dans les deux rainures d'autres en cuivre mince, qu'on remplira d'eau acidulée. En supprimant le conducteur circulaire, on pourra reconnaître l'action du magnétisme terrestre sur un conducteur mobile vertical.

10° *Anneaux de Nobili.*

On perce un petit trou au fond d'un verre ordinaire de 2 pouces de hauteur et de deux de diamètre, on y introduit un fil de platine, à l'extrémité supérieure duquel on soude un disque ou une lame de platine, on met le verre sur un petit trépied ou support en bois percé à son milieu et placé par son centre au dessus de la coupe C (figure 1) remplie de mercure; dans laquelle plongera l'autre extrémité du fil.

On abaisse le conducteur $A''a'''$ de manière que la pointe du fil nn' également en platine, se trouve à 1/2 ligne ou moins du centre du disque en platine; puis on y verse la dissolution saline que l'on veut employer et laquelle devra dépasser un peu la pointe du fil nn'.

§ II.

MOULINETS ET BOUSSOLES ÉLECTRO-MAGNÉTIQUES.

1° *Moulinet horizontal.*

La figure 19 représente l'appareil. A A' A'' est un trépied en cuivre avec trois vis calantes V, V', V'' : BCD est une seule pièce pris-

matique en cuivre deux fois recourbée à angle droit ou bien un assemblage de trois pièces B, C, D ajustées au trépied ; au centre de celui-ci se trouve une vis de rappel O avec chape d'acier et sur la même verticale en O′ une autre vis semblable ; sur ces deux chapes s'appuie l'axe vertical de l'électro-aimant, qui est composé d'une lame de fer doux de 18 centimètres de longueur, de 13 millimètres de largeur, d'un millimètre d'épaisseur et enveloppée de 180 tours de fil de cuivre revêtu de soie d'un millimètre de diamètre. Les deux bouts du fil sont recourbés et touchent au mercure contenu dans un godet circulaire G fixé par trois vis au centre du trépied et divisé en deux compartiments égaux, par de petites lames de bois sec un peu concaves à leur milieu. Deux fils *a b*, *a′ b′* avec vis de pression fixées au godet recevront les électricités de la pile et la conduiront dans les deux compartiments du godet.

L'appareil est très-mobile par l'influence d'un très-faible aimant: et même par celle de la terre seule : placé par ses deux cloisons dans le méridien magnétique il prend un mouvement de rotation par l'influence d'une simple pile composée d'un cylindre de coke de 3 pouces de hauteur et de 6 à 7 lignes de diamètre plongé dans un vase de terre, qui est entouré d'un cylindre de zinc ouvert des deux côtés. On met de l'acide nitrique concentré en contact avec le coke et de l'acide sulfurique dans le verre, qui contient le zinc.

Ce moulinet deviendra boussole, si à la place du godet employé on en substitue un autre à deux rainures circulaires remplies en partie de mercure, avec lesquelles communiquent les deux bouts du fil de l'électro-aimant.

2° *Moulinet et boussole électro-dynamiques.*

Si l'on remplace l'électro-aimant de la figure précédente par un solénoïde composé de deux ou trois couches de fil conducteur isolé et portant à son centre un collier A en cuivre avec deux pointes *ab*, *a′b′* en acier formant un axe vertical (figure 20), on aura un moulinet et une boussole électro-dynamiques, que la seule action du magnétisme terrestre pourra faire mouvoir avec facilité.

L'appareil sera encore plus sensible, si l'on suspend le solénoïde par sa pointe *ab*, au crochet *a* figure 1, l'inférieure *a′ b′* plongeant dans la coupe C.

3° *Moulinet et boussole électro-magnétiques verticaux.*

L'appareil est indiqué figure 21. AA′ est un pied en bois avec deux colonnes C et C′, munies chacune d'un montant en cuivre E et E′, que

portent des vis de rappel F et F′ avec des concavités aiguës à leurs extrémités, destinées à recevoir les pointes d'un axe horizontal G.

On fixe sur cet axe un cylindre creux en ivoire et sur celui-ci à l'aide de petites vis, quatre demi-cercles coupés en biseau, et isolés les uns des autres, de telle sorte, que le premier et le troisième sont au-dessus, si les deux autres sont en dessous, et que le premier et le second plongent alternativement dans du mercure d'un compartiment, le troisième et le quatrième plongeant de même alternativement dans du mercure de l'autre compartiment d'un godet en bois fixé, à l'aide d'une vis, à la colonne C′.

Le mercure doit être à la même hauteur dans les deux parties du godet, et les formes et la position des ailes doivent être telles, que les unes sortent du mercure, les autres y entrent immédiatement et à la fois. Sur l'axe G on fixe les deux électro-aimans en croix enveloppés du fil isolé, tourné dans le même sens sur les deux lames et l'on en fait communiquer un bout du fil aux ailes 1 et 4 et l'autre bout aux ailes 2 et 3.

Le moulinet placé dans le méridien magnétique, animé d'un courant électrique, prend aussitôt un mouvement de rotation ; il devient une boussole d'inclinaison lorsque l'on remplace les quatre ailes par deux disques en cuivre, qui communiquent respectivement avec les deux bouts du fil conducteur.

Au lieu de deux électro-aimants, on pourra n'en prendre qu'un seul, l'expérience réussira très-bien, mais le mouvement sera moins rapide comme me l'ont montré nombre d'essais.

Comme le sautillement du mercure en occasionne une perte, on peut l'éviter, en plaçant un verre cylindrique autour du godet (fig. 19) et un verre concave sur le godet (fig. 21).

Ce moulinet n'est destiné à être mu que par l'influence du magnétisme terrestre, et la petite pile à coke décrite ci-dessus suffit à cet effet; mais en prenant un seul élément d'une pile à platine de 6 pouces de longueur sur 3 de largeur et plaçant de deux côtés du moulinet deux aimants ou électro-aimants, j'ai élevé souvent en 2″ 200 grammes à 16 pouces de hauteur, ce qui donne un travail utile d'un kilogr. en 20″. Il fait aussi plus de 1300 tours par minute; cependant cet instrument n'est nullement propre aux travaux mécaniques; j'en décrirai plus tard d'autres qui produisent des effets considérables.

Les appareils précédents et plusieurs autres, que je ferai connaître dans la suite, ont été parfaitement bien construits par mon préparateur de physique, M. Sauvage, et c'est le soin donné à la construction qui fait qu'ils marchent si facilement.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Sur le genre Bembix *et sur une nouvelle espèce d'*Orthis *des terrains crétacés de Belgique*,

par L. de KONINCK, professeur à l'Université de Liége.

En attendant que nos loisirs nous permettent de nous livrer à un travail général sur les nombreux fossiles que nous avons recueillis dans les divers étages des terrains crétacés de notre pays, nous avons cru qu'il ne serait pas sans intérêt de faire connaître déjà quelques-unes des nouvelles espèces que nous avons eu le bonheur de découvrir. Nous commençons la série de nos descriptions, par celle d'une nouvelle espèce de BRACHIOPODE, ayant tous les caractères que M. de Buch a assignés au genre *Orthis* et par celle d'un GASTÉROPODE qu'il nous a été impossible de rapporter à aucun des genres actuellement connus. Nous proposons de faire un genre nouveau de ce dernier, sous le nom de *Bembix*, que nous avons dérivé d'un mot grec βεμβιξ, signifiant toupie, dont il a complétement la forme.

ORTHIS MILLEPUNCTATA.

Pl. 6, fig. 1, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.

Cette espèce se distingue facilement de toutes ses congénères par l'innombrable quantité de petits trous, à peu près réguliérement disposés en quinconce, dont la surface de ses deux valves est criblée. Ces ouvertures ont évidemment été produites par les cils vibratils de l'animal et ne traversent point toute l'épaisseur de la coquille ; elles sont tellement petites, qu'on ne les distingue qu'à l'aide d'une forte loupe (comparez la fig. 1, *a*). La forme de la coquille, abstraction faite de l'area, est à peu près semi-circulaire. La plus grande largeur est située au tiers de sa valve ventrale. Cette valve est beaucoup moins bombée que la valve opposée; elle porte dans son milieu un petit bourrelet, correspondant à un sinus étroit et peu profond, qui se trouve

sur la valve dorsale et qui prend son origine au sommet de cette valve.

L'area est formée aux dépens de l'une et de l'autre des deux valves (V. fig. 1, *d*); elle est fortement triangulaire, limitée par des arêtes très-tranchantes et formant entre elles un angle d'environ 55°. Elle est percée dans son centre d'une grande ouverture de la forme d'un triangle à côtés courbes. Le sommet de cette ouverture est en partie fermé par une lame oblique composée de la réunion d'un certain nombre de petites lames imbriquées et soudées ensemble; cette lame a probablement servi à diriger le muscle d'attache, qui a dû être très-considérable. On remarque sur la surface de chaque valve quelques petites côtes rayonnantes, à peine indiquées et trois ou quatre anneaux d'accroissement irrégulièrement distribués, mais fortement prononcés.

Dimensions : Longueur de la valve ventrale 100; largeur 139; épaisseur de la coquille 39; largeur de l'area 0, 68; largeur du sinus 0, 16 de la largeur totale.

LOCALITÉ. Cette *Orthis* a été trouvée dans la craie chloritée inférieure de Sassignies (Hainaut). C'est la seule espèce de ce genre que nous ayons rencontrée dans un gisement semblable. M. Hagenow en a fait connaître quelques autres espèces provenant de la craie blanche de l'île de Rugen. Nous avons observé deux de ces espèces dans la craie de Ciply près de Mons et une dans celle de Maestricht.

GENRE BEMBIX. DE KONINCK.

CARACTÈRES. *Coquille turbinée, plus longue que large, non ombiliquée. Spire irrégulière ; les deux derniers tours occupant à peu près la moitié de la longueur et se retrécissant avec l'âge. Bouche très petite et ovale. Labre oblique et tranchant.*

Les genres *Turbo* et *Phasianella*, sont évidemment ceux avec lesquels le genre *Bembix* a le plus de rapports. Il se distingue cependant immédiatement de l'un et de l'autre, par le retrécissement progressif de ses deux derniers tours de spire, retrécissement qui donne à la seule espèce que nous en connaissons, un aspect ventru et boursoufflé et détermine la petitesse extraordinaire de sa bouche. Nous croyons que sa place est marquée dans la famille des TURBINACÉES de Lamarck (TROCHIDÉES de M. A. d'Orbigny), à la suite du genre PHASIANELLA.

BEMBIX UTRICULUS.

Pl. 6, fig. 2, *a*, *b*, *c*.

Cette coquille, dont la taille ne dépasse pas 15 millimètres de longueur, est faiblement allongée, subfusiforme et très-renflée dans son milieu. Elle est composée de 9 tours de spire. Le diamètre transversal des 7 premiers tours s'accroissant régulièrement, leur ensemble représente assez bien un cône dont l'angle du sommet aurait environ 62°. Le restant figure une demi-sphère, qui terminerait la base du cône.

Les tours de spire ne sont séparés les uns des autres que par une suture linéaire peu profonde ; ils sont à peu près planes à l'extérieur, à l'exception des deux derniers qui sont faiblement bombés. Leur surface est couverte d'un assez grand nombre de stries transverses, beaucoup mieux prononcées sur le sommet, mais en revanche plus nombreuses sur la base ; ces stries sont traversées un peu obliquement par d'autres plus fines encore, parallèles au labre et dépendant de l'accroissement successif de la coquille. La columelle est légèrement plissée et assez épaisse.

Dimensions : longueur 100 ; épaisseur 59.

LOCALITÉ. Cette rare espèce provient des couches siliceuses, dépendant de la craie chloritée inférieure (tourtia) de Montignies-sur-Roc (Hainaut).

EXPLICATION DE LA PLANCHE 6.

Figure 1.

a. ORTHIS MILLEPUNCTATA. d. K. Grossie, vue du côté de la valve ventrale.
b. La même, de grandeur naturelle, vue du même côté.
c. La même, vue du côté de la valve dorsale.
d. La même, vue du côté de l'area.
e. La même, vue du côté du front.

Figure 2.

a. BEMBIX UTRICULUS. d. K. Grossi.
b. Le même, de grandeur naturelle.
c. Le même, grossi, du côté de l'ouverture.

XI. *Propositions de Géométrie appliquée ;*

Par J.-N. NOËL, Professeur à l'Université de Liége.

Parmi les *propositions*, en grand nombre, que nous allons considérer, quelques-unes sont peu connues, et les autres, bien qu'elles puissent se trouver dans les traités élémentaires ou dans les recueils scientifiques, sont ici rapprochées, pour en déduire des conséquences utiles : toutes sont considérées sous le point de vue *pratique*, trop négligé dans les traités de géométrie, ordinairement en usage.

Les figures employées nous paraissent suffisamment indiquées par de grandes lettres ; mais le lecteur est prié de les tracer, s'il les juge nécessaires à la clarté des démonstrations.

Les longueurs sur le terrain.

1. INSTRUMENTS. Le *mesurage* des grandeurs géométriques se réduit toujours à celui des droites, qui en sont les *éléments générateurs*. Sur le terrain, supposé *plan*, le mesurage des droites, visibles et accessibles, peut se faire, avec une approximation suffisante, au moyen de la *chaine* ; surtout quand on mesure la droite au moins deux fois en sens opposés et qu'on prend la demi-somme des deux nombres résultants. Mais il arrive souvent que la droite à mesurer est *inaccessible*, du moins en partie, bien que ses extrémités soient *visibles* : dans ce cas, on en calcule la longueur, à l'aide des triangles, soit *rectangles*, soit *obliquangles*, soit *semblables*.

Or, le tracé de ces triangles sur le terrain, exige divers *instruments*, savoir : des *jalons* pour y tracer des droites et marquer leurs intersections ; la *chaîne*, accompagnée de *fiches*, pour mesurer les droites accessibles ; l'*équerre* pour former l'angle droit ; enfin la *fausse équerre*, pour tracer deux angles obliques supplémentaires. Assez ordinairement l'équerre est subdivisée en demi-angles droits : il serait même commode, pour certaines opérations, que l'angle droit fût divisé en deux autres de 30 et de 60 *degrés*. C'est ce qu'on réalise au moyen d'un cordeau *sans fin*, long de 18 mètres, par exemple, après qu'il est lié à quatre piquets, les trois premiers le divisant en trois parties de 6^m chacune et le quatrième piquet étant le milieu de l'une d'elles ; car le cordeau tendu et les piquets fixés sur le terrain, on y trouve les angles de 90, 60 et 30°.

Dans l'*arpentage*, l'équerre et la fausse équerre peuvent suffire, et on les préfère au *graphomètre*, comme plus faciles à se procurer ; mais le graphomètre est plus exact et d'un usage plus étendu : aussi remplace-t-il les deux autres instruments, quand il faut de plus grandes approximations.

2. Usages des jalons. On peut toujours tracer, au moyen des jalons (accompagnés parfois de la fausse équerre), des droites ou *alignements*, avec exactitude et célérité ; tandis que le mesurage des droites et des angles exige beaucoup de temps et de soin : il demande des instruments de prix, souvent difficiles à acquérir et à transporter. C'est pourquoi, dans la *géométrie pratique*, on tâche de remplacer, par des alignements, les mesures à prendre avec des instruments gradués; et tel est spécialement le but de la théorie des *transversales rectilignes*. Par cette théorie, en effet, on résout aisément, sur le terrain *horizontal*, les problèmes que voici :

I. *Par un point donné, mener une droite qui passe par le concours invisible de deux droites tracées ;* comme pour percer, dans un bois, une allée qui aboutisse au point de jonction invisible de deux chemins, déjà pratiqués ; etc.

II. *Prolonger une droite au-delà d'un obstacle qui borne la vue.* Cet obstacle pourrait être un bois ou une montagne, qu'il faudrait percer par un chemin ou un *tunnel*; chaque fois il faudrait attaquer l'obstacle des deux côtés, pour aller plus vite ; et chaque fois aussi on pourrait avoir besoin de connaître, à l'avance, la longueur de la percée. Or, la construction, pour le prolongement, conduirait au calcul de cette longueur, à l'aide de deux autres, qu'il faudrait mesurer le plus exactement possible. (Voyez la Géométrie, 2e édit.)

Observez d'ailleurs que les jalons sont indispensables, dans toutes les opérations sur le terrain.

3. Usages de la chaîne. La chaîne d'arpenteur, accompagnée de *fiches* et de jalons, n'est pas seulement nécessaire pour évaluer numériquement toute droite accessible *jalonnée;* mais à l'aide des propriétés des triangles rectangles, obliquangles et semblables, elle peut suppléer à l'équerre et à la fausse équerre pour résoudre les problèmes que voici :

I. Par un point donné tracer une parallèle à une droite, accessible seulement par ses extrémités et calculer la longueur de cette droite.

II. Par un point donné sur une droite jalonnée, élever une perpendiculaire à cette droite.

III. D'un point situé hors d'une droite, abaisser une perpendiculaire à cette droite et calculer la longueur de cette perpendiculaire, quand son pied est inaccessible.

IV. Enfin calculer la hauteur d'un édifice dont le pied est inaccessible.

Dans ce problème, comme dans les précédents, les erreurs se multiplient, et il importe que les tracés et les nombres, fournis par le mesurage direct, soient les plus approchés qu'il se puisse.

4. Usages de la fausse équerre. Voici plusieurs des usages nombreux de la fausse équerre, toujours accompagnée de jalons et souvent de la chaîne :

I. Prolonger une droite au-delà d'un obstacle qui borne la vue sur le terrain ; 1° en prenant deux longueurs égales; 2° sans mesurer aucune longueur.

II. Prolonger une droite donnée d'un certain multiple de cette droite, sans mesurer aucune longueur.

III. Avec la seule fausse équerre et des jalons, abaisser d'un point donné, qui pourrait être inaccessible, une perpendiculaire à une droite donnée.

IV. Par un point donné sur une droite jalonnée, élever une perpendiculaire à cette droite, avec la seule fausse équerre et des jalons.

V. La seule fausse équerre et des jalons suffisent pour marquer, sur le terrain, la bissectrice de l'angle dont le sommet est inaccessible et même invisible.

VI. On peut calculer la longueur d'une droite dont les deux extrémités sont visibles et une seule accessible, à l'aide des deux angles supplémentaires de la fausse équerre, faits aux extrémités d'une droite passant par l'extrémité accessible proposée : il y aura trois longueurs à mesurer directement sur le terrain. La même construction servirait à calculer la longueur d'une droite visible et entièrement inaccessible; mais alors il y aurait quatre droites à mesurer directement.

VII. Il faut la fausse équerre, des jalons et la chaîne, pour mesurer trois droites, dans chacun des trois problèmes que voici : 1° Calculer la position de la parallèle menée par un point inaccessible à une droite entièrement abordable; 2° calculer la longueur d'une droite dont une seule extrémité soit accessible ; 3° enfin, calculer la longueur d'une droite entièrement inaccessible.

Dans les deux derniers problèmes, on détermine une parallèle accessible à la droite inaccessible qu'il faut mesurer. Bien que les solutions soient fort simples et puissent donner des résultats suffisamment approchés, moyennant les soins convenables, le degré de l'approximation reste toutefois inconnu. On préfère, dans ce cas, se servir du graphomètre et recourir au *calcul trigonométrique*, où les causes d'erreurs sont moins nombreuses, parce que les données de la question y sont réduites au plus petit nombre possible.

De la Résolution numérique des triangles rectilignes.

5. Lorsque deux angles du triangle *scalène* sont donnés, le troisième est connu ; les trois angles ne peuvent donc compter que pour deux *données*, et pour une seule ou pour aucune, si le triangle est *rectangle* ou *isocèle*. ou s'il est *équilatéral*. Les *éléments générateurs* du triangle scalène sont : deux angles, les trois côtés, le périmètre, les trois hauteurs, le rayon du cercle inscrit, celui du cercle circonscrit et ceux des trois cercles exinscrits ; ce qui fait déjà 14 éléments générateurs ou *descriptifs* du triangle. Et comme, en général, la connaissance de trois éléments distincts suffit pour déterminer le triangle scalène, on voit qu'*étant donnés trois quelconques des 14 éléments ci-dessus, la détermination graphique ou numérique du triangle fournit 354 problèmes différents*, du moins en apparence ; car plusieurs de ces problèmes peuvent *rentrer les uns dans les autres*, ou être *indéterminés* ou *impossibles*, suivant les valeurs particulières des données.

Ce nombre de problèmes serait bien plus élevé, si l'on faisait intervenir, comme éléments générateurs du triangle, les droites qui joignent les sommets aux milieux des côtés opposés, les bissectrices des trois angles, les segments qu'elles déterminent sur les côtés, etc. Mais, remarquons-le bien, il y a toujours plusieurs de ces problèmes qui rentrent les uns dans les autres ; et c'est ainsi qu'en se bornant aux cinq éléments générateurs, savoir : les trois côtés et deux angles, comme on le fait ordinairement en trigonométrie ; les dix problèmes généraux, pour la résolution numérique du triangle scalène, se réduisent à quatre, essentiellements différents.

Observons encore que plusieurs des 354 problèmes ci-dessus, bien que déterminés et possibles, ne peuvent se résoudre avec la règle et le compas. même en s'aidant du calcul, pour parvenir à la construction. Tel est, par exemple, le problème où, connaissant l'aire et les rayons des cercles inscrit et circonscrit, on cherche les côtés ; tel est aussi le problème où, le rayon du cercle inscrit et deux côtés étant donnés, on cherche le troisième côté. Mais le triangle se construit aisément quand on connaît un côté, le contact sur lui et le rayon du cercle inscrit, ou bien deux côtés et les contacts sur eux, etc.

Observons enfin, que tous les problèmes sur la résolution numérique des triangles rectilignes, dépendent plus ou moins immédiatement de celui-ci : *Connaissant numériquement deux côtés et l'angle compris, résoudre le triangle.*

On a plusieurs solutions de ce problème, où il faut rendre les formules calculables par logarithmes ; mais comme les deux plus simples ne sont pas aussi généralement connues qu'elles méritent de l'être, nous allons les développer ici, d'après le *principe des projections ;* lequel

peut fournir toutes les relations de la trigonométrie.

I. Nous désignerons toujours par les grandes lettres A, B, C, les trois angles du triangle ABC, et par les petites lettres a, b, c, les côtés respectivement opposés à ces angles. Ainsi A, B, C, sont les valeurs numériques en degrés, minutes et secondes, des angles proposés; tandis que a, b, c, sont les rapports des côtés à l'unité linéaire, au mètre, par exemple.

La résolution des triangles, où les angles sont représentés par les *lignes trigonométriques*, a pour but de trouver des relations entre quatre des six nombres A, B, C, a, b, c, et surtout de rendre ces relations *calculables par logarithmes*, si elles ne le sont pas.

Ces relations sont nécessairement *homogènes*, puisqu'elles se composent uniquement de droites censées divisées par l'unité linéaire u et par le rayon R des tables, pour les lignes trigonométriques. Le rayon R vaut 10^{10}; mais pour simplifier, on suppose ordinairement $R = 1 = u$. De cette manière, les relations ne sont plus toutes homogènes, du moins en apparence; mais comme chaque ligne trigonométrique est toujours censée divisée par R, il suffit, pour établir l'homogénéité, de faire reparaître ce diviseur R, ou plutôt de l'introduire un nombre de fois suffisant, comme facteur, dans chaque terme de degré inférieur.

II. Cela posé, soit h la hauteur menée du sommet A sur la base a, et t l'aire du triangle ABC, d'où $t = \frac{1}{2} ah$; soient b' et c' les projections des côtés b et c, déterminées sur a par la droite projetante h: b' et c' sont adjacentes aux angles C et B; et suivant que l'angle B est aigu ou obtus, on a $a = c' + b'$ ou $a = b' - c'$. Dans le premier cas, $b' = b \cos C$ et $c' = c \cos B$, d'où $a = b \cos C + c \cos B$; dans le second cas, $b' = b \cos C$ et $c' = c \cos (180° - B)$, d'où $a = b \cos C - c \cos (180° - B)$. Le premier cas fournit le second en changeant cos B en $-\cos (180° - B)$; de sorte qu'il nous suffira de considérer la relation

$$a = b \cos C + c \cos B, \ldots \quad (1)$$

pourvu que quand l'angle B est obtus on y change cos B en $-\cos (180° - B)$.

Comme h est aussi la projection de b ou de c sur sa direction, on a simultanément $h = b \sin C = c \sin B$, et cela quand même l'angle B serait obtus. On aurait de même, $b \sin A = a \sin B$; donc

$$a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C \ldots \quad (2)$$

De plus, il est clair qu'on a, pour le double de l'aire t,

$$2t = ab \sin C = ac \sin B = bc \sin A \ldots \quad (3)$$

III. Si le triangle ABC est rectangle en A, d'où $\sin A = 1$, on aura simultanément

$$b' = b \cos C, \; c' = c \cos B, \; b = a \cos C,$$

$$c = a \cos B,\ h = b \cos B \text{ et } h = c \cos C.$$

Eliminant donc les cosinus et observant que $b' + c' = a$, il vient

$$b^2 = ab',\ c^2 = ac',\ h^2 = b'c' \text{ et } b^2 + c^2 = a^2 \ldots \quad (4)$$

Par ces relations et $ah = bc$, étant données deux quelconques des six droites numériques a, b, c, b', c', h, on peut toujours calculer les quatre autres.

On conçoit que ce problème général peut en fournir un grand nombre d'autres, selon les conditions particulières; ainsi d'après les choix des inconnues et des méthodes d'élimination; on peut calculer les trois côtés a, b, c, dans les huit systèmes particuliers que voici, où $p = a + b + c$:

$b' = 20$ et $c' = 5$;
$a = 25$ et $b + c + h = 37{,}72$;
$b + c = 7$ et $h = 2{,}4$;
$a = 13$ et $ah = 60$;
$a + h = 31{,}72$ et $p = 56$;
$bc = 120$ et $p = 40$;
$a - h = 18{,}28$ et $b - c = 17$;
$h = 4{,}8$ et $p = 24$.

On peut aussi chaque fois calculer les angles B et C; car on a les deux relations

$$\left.\begin{array}{l} b = a \sin B = a \cos C, \\ b = c \operatorname{tang} B = c \cot C. \end{array}\right\} \ldots \quad (5)$$

Enfin si a était donné numériquement, aussi bien que m dans $m^2 = bh$, le côté c serait racine de l'équation

$$c^3 - a^2 c + am^2 = 0\,;$$

laquelle, pour $a = 5$ et $m^2 = 9{,}6$, devient $(c-3)(c^2 + 3c - 16) = 0$.

IV. Reprenons les relations (1) et (2), que l'on peut écrire ainsi :

$$c \cos B = a - b \cos C \text{ et } c \sin B = b \sin C.$$

Elevant de part et d'autre au carré, puis ajoutant membre à membre, et réduisant d'après $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, il vient

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \ldots \quad (6)$$

Cette relation s'applique au cas où l'angle C est obtus en y changeant cos C en $-\cos(180^\circ - C)$. D'ailleurs $b' = b \cos C$; donc

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab' :$$

c'est la relation que l'on démontre ordinairement par la simple géométrie, et une seconde expression du théorème (6). Ce théorème fournissant trois équations entre les six parties du triangle, suffit pour calculer trois quelconques de ces parties, les trois autres étant données numériquement. Mais les formules résultantes ne sont pas toujours *logarithmiques* ni les plus simples, même en se servant d'*inconnues auxiliaires*, comme pour calculer c lorsque a, b, C sont donnés. D'ailleurs la connaissance des trois angles ne peut compter que pour deux choses données; mais si alors le problème doit être indéterminé, on peut toujours du moins calculer les rapports x et y, dans $a = cx$ et $b = cy$. Substituant en effet dans l'équation (1) et ses deux analogues,

il en résulte

$$y \cos A + x \cos B = 1,$$
$$y - x \cos C = \cos A,$$
$$x - y \cos C = \cos B.$$

Ces trois équations du premier degré donnent aisément

$$x \sin^2 C = \cos A \cos C + \cos B,$$
$$y \sin^2 C = \cos B \cos C + \cos A,$$
$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1 \ldots (7')$$

De plus, $x = a : c = \sin A : \sin C$ et $y = b : c = \sin B : \sin C$. D'ailleurs $- \cos B = \cos (A + C)$; donc

$$\cos (A + C) = \cos A \cos C - \sin A \sin C \ldots (7)$$

On est donc ainsi conduit à l'une des quatre formules fondamentales de la trigonométrie. Il est facile d'en déduire les trois autres en y changeant A en 90° — A, d'où

$$\sin (A - C) = \sin A \cos C - \sin C \cos A;$$

puis en changeant C en — C dans cette formule et la première (7).

V. Cherchons maintenant les formules *logarithmiques* qui se présentent d'abord pour résoudre le triangle dont on connaît numériquement les deux côtés a et b, avec l'angle compris C.

Menant du sommet A la hauteur h et désignant par b' et c' les projections des côtés b et c sur la base a, on aura évidemment

$$c' = a - b', \; b' = b \cos C, \; h = b \sin C,$$
$$h = c' \operatorname{tang} B, \; a \sin B = b \sin A \text{ et } t = \tfrac{1}{2} ab \sin C.$$

Ainsi en faisant reparaître le diviseur R, on aura

$$\left.\begin{array}{l} c' = a - b', \; Rb' = b \cos C, \; Rh = b \sin C, \\ Rh = c' \operatorname{tang} B \text{ et } 2Rt = ab \sin C. \end{array}\right\} \ldots (8)$$

Toutes ces formules homogènes sont calculables par logarithmes : la première $c' = a - b'$, qui devient $c' = a + b'$ quand l'angle C est obtus, fait connaître c' au moyen de b', déterminé par la seconde; la troisième fait connaître h; la quatrième, tang B et par suite l'angle B; d'où il vient l'angle $A = 180° - B - C$; enfin, la dernière détermine l'aire t. Ainsi sans compter l'aire t, déjà donnée par $t = \frac{1}{2} ah$, *il ne faut ouvrir les tables que six fois*, pour résoudre le triangle, dans ce cas. La vérification des calculs peut se faire par $b^2 = b'^2 + h^2$, ou par $a \sin B = b \sin A$, etc.

Cette solution, directe et très-simple, n'est pas indiquée dans les traités de trigonométrie : elle a été donnée par les élèves couronnés à Bruxelles au concours général des colléges, en 1841. Quoique cette marche soit la plus naturelle, elle n'est cependant pas la plus simple pour résoudre le problème proposé : il existe, pour cet effet, des formules logarithmiques, *dont le calcul exige qu'on ouvre seulement les tables cinq fois*. Il est surprenant que ces formules, indiquées, sans démon-

strations, dans le *Bulletin des sciences mathématiques*, etc., mars 1831, ne soient pas généralement enseignées. Déjà nous les avions indiquées en 1830, puis appliquées, en 1835, dans la 2e édition du traité de géométrie. Mais on peut les démontrer plus simplement, à l'aide du principe des projections, comme il suit :

VI. Considérons le triangle quelconque ABC (fig. à tracer ; chose facile). Les deux côtés a et b, avec l'angle compris C, étant donnés numériquement, soient d et e les longueurs des bissectrices de l'angle C et de l'angle extérieur supplémentaire, depuis le sommet C jusqu'aux points D et E où elles coupent BA ou c et son prolongement ; de sorte que $CD = d$ et $CE = e$. Il est clair que ces deux bissectrices sont perpendiculaires entre elles et qu'ainsi l'angle E est complément de l'angle $CDE = x$, et l'angle $ACE = 90° - \frac{1}{2}C$. De plus, projeter le côté AB ou c sur la direction CD, c'est en même temps y projeter les côtés b et a; si donc l'angle $A > B$, d'où le côté $a > b$, il est clair que la projection du côté c sur CD, savoir $c \cos x$, est la différence des projections des côtés a et b sur CD, savoir $a \cos \frac{1}{2}C$ et $b \cos \frac{1}{2}C$. On a donc

$$c \cos x = (a - b) \cos \tfrac{1}{2}C \ldots (9)$$

La projection du côté c sur la direction EC est $c \cos E$ ou $c \sin x$, tandis que les projections des côtés a et b sur EC sont $a \cos (90° - \frac{1}{2}C)$ et $b \cos (90° - \frac{1}{2}C)$ ou $a \sin \frac{1}{2}C$ et $b \sin \frac{1}{2}C$. Il est clair d'ailleurs que la projection de c est la somme des deux autres ; donc

$$c \sin x = (a + b) \sin \tfrac{1}{2}C \ldots \quad (10)$$

L'angle x étant extérieur au triangle CBD, on a $x = B + \frac{1}{2}C$, et puisque l'angle x est aigu, il en est de même de l'angle B. Substituant cette valeur de x, puis divisant (9) par (10), il vient les formules cherchées :

$$\left.\begin{aligned} c \cos (B + \tfrac{1}{2}C) &= (a - b) \cos \tfrac{1}{2}C, \\ c \sin (B + \tfrac{1}{2}C) &= (a + b) \sin \tfrac{1}{2}C, \\ (a + b) \cot (B + \tfrac{1}{2}C) &= (a - b) \cot \tfrac{1}{2}C. \end{aligned}\right\} \ldots (11)$$

Toutes ces formules homogènes sont logarithmiques : la troisième fait connaître l'angle $B + \frac{1}{2}C = x$ et par suite l'angle $B = x - \frac{1}{2}C$; d'où l'angle $A = 180° - B - C$. Et comme les logarithmes du sinus, du cosinus, de la tangente et de la cotangente se trouvent dans la même page des tables, il aura fallu ouvrir celles-ci 4 fois, pour avoir x ; et il ne faudra plus les ouvrir qu'une fois, pour avoir c, par l'une des deux premières formules (11); lesquelles fournissent un moyen de vérification, puisqu'elles doivent donner la même valeur à c.

Cette solution étant la plus simple et par conséquent la plus exacte, doit être préférée à toutes les autres, où il faut ouvrir les tables 7 ou 8 fois. Prenons par exemple, le principe ordinairement employé, et

pour établir ce principe, observons que $\frac{1}{2}C = 90° - \frac{1}{2}(A + B)$; d'où $B + \frac{1}{2}C = 90° - \frac{1}{2}(A - B)$ et $\cot(B + \frac{1}{2}C) = \tang \frac{1}{2}(A - B)$. La troisième formule (11) devient donc

$$a + b : a - b :: \cot \tfrac{1}{2} C : \tang \tfrac{1}{2}(A - B).$$

Par cette proportion, les tables font connaître la demi-différence n des angles A et B, d'où $\frac{1}{2}(A - B) = n$: on connaît déjà leur demi-somme $s = 90° - \frac{1}{2}C$, d'où $\frac{1}{2}(A + B) = s$; on aura donc $A = s + n$ et $B = s - n$.

Connaissant ainsi les trois angles, on trouvera le troisième côté c par la proportion $\sin A : \sin C :: a : c$; ainsi il faudra ouvrir 8 fois les tables.

Ce procédé est donc le plus compliqué et celui où les causes d'erreurs sont les plus nombreuses. Si la détermination de n était inexacte, l'erreur se détruirait en ajoutant les trois angles ; mais les proportions des sinus donneraient deux valeurs différentes au côté c. Cette vérification exigerait qu'on ouvrît les tables onze fois en tout ; tandis que par les deux bissectrices, la vérification de c demande seulement 6 fois l'ouverture des tables.

VII. On peut aussi calculer les deux bissectrices d et e; car il existe deux couples de triangles rectangles semblables, dont la comparaison des côtés homologues fournit

$$a \sin \tfrac{1}{2} C : b \sin \tfrac{1}{2} C :: a \cos \tfrac{1}{2} C - d : d - b \cos \tfrac{1}{2} C,$$
$$a \cos \tfrac{1}{2} C : b \cos \tfrac{1}{2} C :: e + a \sin \tfrac{1}{2} C : e - b \sin \tfrac{1}{2} C.$$

De là résultent les deux formules logarithmiques

$$\left.\begin{array}{l}(a + b)\, d = 2ab \cos \tfrac{1}{2} C, \\ (a - b)\, e = 2ab \sin \tfrac{1}{2} C.\end{array}\right\} \ldots (12)$$

Ces formules conduisent à résoudre le triangle, connaissant les deux côtés a et b, avec l'une des deux bissectrices d ou e. Mais si l'on connaissait numériquement les deux bissectrices d et e, avec l'angle C, on pourrait aussi résoudre le triangle ; car outre $d \tang x = e\mathrm{R}$, on aurait $b \sin (x + \frac{1}{2} C) = d \sin x$, etc.

VIII. Ajoutant membre à membre les carrés des équations (9) et (10), on trouve

$$c^2 = (a - b)^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} C + (a + b)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} C.$$

Cette relation, comparée au théorème (6), donne

$$\cos C = \cos^2 \tfrac{1}{2} C - \sin^2 \tfrac{1}{2} C \ldots (13)$$

Substituant successivement, dans l'expression de c^2, les valeurs $1 - \cos^2 \frac{1}{2} C$ et $1 - \sin^2 \frac{1}{2} C$ de $\sin^2 \frac{1}{2} C$ et $\cos^2 \frac{1}{2} C$; réduisant, transposant et décomposant en facteurs ; posant d'ailleurs $a + b + c = 2p$ et faisant reparaître le diviseur R, on aura les formules logarithmiques connues :

$$\left.\begin{aligned} ab\sin^2 \tfrac{1}{2}C &= R^2(p-a)(p-b),\\ ab\cos^2 \tfrac{1}{2}C &= R^2 p(p-c);\\ p(p-c)\tan^2 \tfrac{1}{2}C &= R^2(p-a)(p-b). \end{aligned}\right\} \ldots (14)$$

Ces formules et la dernière, de préférence, servent à calculer les trois angles, connaissant numériquement les trois côtés. Et comme alors $\sin C = 2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C$, il vient, pour l'aire t du triangle et pour les bissectrices d et e,

$$\left.\begin{aligned} t^2 &= p(p-a)(p-b)(p-c),\\ (a+b)^2 d^2 &= abp(p-c),\\ (a-b)^2 e^2 &= ab(p-a)(p-b). \end{aligned}\right\} \ldots (15)$$

Combinant par multiplication et par division les valeurs de $\tan^2\frac{1}{2}A$ et $\tan^2\frac{1}{2}B$, on trouve, réductions faites,

$$\tan\tfrac{1}{2}A = \frac{a+b-c}{a+b+c}\cot\tfrac{1}{2}B = \frac{c+(a-b)}{c-(a-b)}\tan\tfrac{1}{2}B.$$

Connaissant donc numériquement l'angle B, le côté c et la somme ou la différence des deux autres côtés, cette double formule servira à résoudre le triangle proposé.

Problèmes déterminés.

6. La trigonométrie et l'emploi des tables fournissent, de la manière la plus simple et la plus exacte, la solution de tout *problème déterminé* de géométrie numérique, en diminuant les causes d'erreurs, et en réduisant au plus petit nombre possible les *données* de la question. C'est ce qu'on peut remarquer *dans le calcul de la distance entre deux objets inaccessibles*, problème qui reçoit divers énoncés et où les formules (11) jouent un rôle important; c'est aussi ce qu'on remarque dans les problèmes déterminés que nous allons indiquer.

I. *Quatre objets inaccessibles* A, B, C, D, *sont en ligne droite et ne peuvent être vus que du seul point* O, *où l'on se trouve; comment calculer la distance* BC = z, *connaissant les longueurs* AB = a *et* CD = b?

Tel est le *problème des cinq points*, où l'inconnue z est donnée par une équation du second degré et où il faut une inconnue auxiliaire, pour appliquer le calcul logarithmique.

II. *Réduire à un seul terme la somme algébrique de quatre sinus ou de quatre cosinus.* Ce problème, déjà traité par M. *Cauchy*, fournit quatre formules entre les trois angles quelconques a, b, c. On peut y parnir par les quatre formules fondamentales de la trigonométrie; et si l'on pose $a+b+c=s$, on trouvera

$$\begin{aligned} &\sin(s-2c)+\sin(s-2b)+\sin s-\sin(s-2a) = 4\sin a\cos b\cos c,\\ &\sin(s-2c)+\sin(s-2b)+\sin(s-2a)-\sin s = 4\sin a\sin b\sin c,\\ &\cos(s-2c)+\cos(s-2b)+\cos(s-2a)-\cos s = 4\cos a\cos b\cos c,\\ &\cos(s-2c)+\cos(s-2b)-\cos(s-2a)-\cos s = 4\cos a\sin b\sin c. \end{aligned}$$

Ces formules s'appliquent aux trois angles d'un triangle; à leurs

doubles et à leurs moitié; mais on peut vérifier directement les systèmes de formules qui en résultent et en déduire d'autres remarquables.

III. *Développer tang* s *et cot* s *ou les exprimer au moyen des tangentes et des cotangentes des trois angles* a , b , c. Les développements s'appliquant aux trois angles d'un triangle ; à leurs doubles et à leurs moitiés, à leurs triples et à leurs tiers , etc. Il en résulte plusieurs formules remarquables et utiles à certaines réductions analytiques.

IV. *On peut trouver quelle est la ligne trigonométrique* x *dans chacune des équations :*

$(\text{tang}\, a + \cot a - 2\sin 2a)\, x = 2\cos 2a$;
$9x^2 = 9 + 4\cos^2 a$; $(1 - \text{tang}^2 a)\, x^2 = \cos 2a$;
$(\text{séc}^2 a - \text{coséc}^2 a + 4\,\text{coséc}^2 2a)\, x = 2\,\text{séc}\, a$;
$x\cos 2a = \cot a - \text{tang}\, a - \cot 2a$; $4x^2 = 3 + \text{séc}^2 a$;
$2x = \text{tang}\, a + \cot a - 2\cos 2a$; $\sin 30° + x\cos 30° = 1$;
$x\cos a - \sin a = 1$; $2x\,\text{tang}\, a - 1 = \text{séc}^2 a$;
$x^2\cot a - \text{tang}\, a = \cot a$; $3x\cos a - \text{coséc}\, a = \cos a\ \text{séc}\, 2a$.

V. *On peut résoudre le triangle dont on connaît les trois angles et le rayon* r *du cercle circonscrit ou l'un des rayons des cercles inscrit et exinscrits.* Dans le premier cas, on a simultanément

$$a = 2r\sin A,\ b = 2r\sin B,\ c = 2r\sin C;$$
$$t = 2r^2 \sin A \sin B \sin C \text{ et } 4rt = abc.$$

Soit r' le rayon du cercle inscrit : on a d'abord

$$a = r'(\cot \tfrac{1}{2} B + \cot \tfrac{1}{2} C);$$

et ensuite

$$r' \cos \tfrac{1}{2} A = a \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C.$$

Cela donne

$$r' \cos \tfrac{1}{2} B = b \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} C,$$
$$r' \cos \tfrac{1}{2} C = c \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B,$$
$$r' = 4r \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C.$$

Soient a', b', c', les rayons des cercles exinscrits aboutissant respectivement aux trois côtés a, b, c. Il est aisé de voir que

$$a = a'(\text{tang} \tfrac{1}{2} B + \text{tang} \tfrac{1}{2} C).$$

De là et de ce qui précède, on tire les quatre systèmes :

$a' \cos \tfrac{1}{2} A = a \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C$	$a' = r' \sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C$
$b' \cos \tfrac{1}{2} B = b \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} C$	$b' = 4r \sin \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} C$
$c' \cos \tfrac{1}{2} C = c \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B$	$c' = 4r \sin \tfrac{1}{2} C \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B$
$a' = r' \cot \tfrac{1}{2} B \cot \tfrac{1}{2} C$	$t = r'^2 \cot \tfrac{1}{2} A \cot \tfrac{1}{2} B \cot \tfrac{1}{2} C$
$b' = r \cot \tfrac{1}{2} A \cot \tfrac{1}{2} C$	$t = a'^2 \cot \tfrac{1}{2} A\, \text{tang} \tfrac{1}{2} B\, \text{tang} \tfrac{1}{2} C$
$c' = r' \cot \tfrac{1}{2} A \cot \tfrac{1}{2} B$	$t = b'^2 \cot \tfrac{1}{2} B\, \text{tang} \tfrac{1}{2} A\, \text{tang} \tfrac{1}{2} C.$

Connaissant b', c' et r, on aura les trois angles par

$$2r\cos A = b' + c' - 2r \text{ et } 4r\cos \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2}(B - C) = c' - b'.$$

Connaissant a, r et r', on aura les trois angles par

$a = 2r \sin A$, $a \cot v = 2r'$ et $\sin v \cos \frac{1}{2}(B - C) = \cos(v + \frac{1}{2}A)$.

La bissectrice d de l'angle C est donnée par

$$\cos \tfrac{1}{2}(A - B)\, d = r \sin A \sin B.$$

VI. On a des formules pour calculer la somme algébrique des sinus et des cosinus, soit des trois angles du triangle, soit de leurs doubles ou de leurs moitiés. Par ces formules, si f, g, h sont les distances du centre du cercle circonscrit aux trois côtés a, b, c, d'où

$$f = r \cos A\,,\ g = r \cos B \text{ et } h = r \cos C\,;\ \ldots (16)$$

on trouve les dix relations que voici, expressions d'autant de théorèmes, faciles à énoncer :

$$f + g + h = r + r',\ g + h - f = a' - r,$$
$$f + h - g = b' - r,\ f + g - h = c' - r,$$
$$a' + b' + c' = r' + 4r,\ a' + b' - c' = 4h - r',$$
$$a' + c' - b' = 4g - r',\ b' + c' - a' = 4f - r',$$
$$1 : a' + 1 : b' + 1 : c' = 1 : r' \text{ et } t^2 = a'b'c'r'.$$

Substituant dans la formule (7′) les valeurs des trois cosinus, tirées de (16), il vient pour calculer le rayon r, l'équation

$$r^3 - (f^2 + g^2 + h^2)\, r - 2fgh = 0.\ \ldots (17)$$

Cette équation n'ayant qu'une seule racine réelle positive, il n'existe qu'un seul triangle, dans lequel les distances f, g, h soient données et positives; mais le rayon r et par suite le triangle ne peut se construire que quand deux des trois distances sont égales entre elles, ou bien pour les valeurs particulières de ces distances, qui rendent le rayon r rationnel.

VII. Soient k, m, n les distances du centre du cercle inscrit aux sommets A, B, C; on aura

$$r' = k \sin \tfrac{1}{2} A,\ r' = m \sin \tfrac{1}{2} B \text{ et } r' = n \sin \tfrac{1}{2} C \ldots (18)$$

mais $\cos A + \cos B + \cos C - 1 = 4 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C$ donne

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A + \sin^2 \tfrac{1}{2} B + \sin^2 \tfrac{1}{2} C + 2 \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C = 1.$$

Substituant donc les valeurs des sinus des demi-angles, tirées de (18), et posant 1 sur $r' = x$, 1 sur $k = K$, 1 sur $m = M$ et 1 sur $n = N$, il vient

$$x^3 - (K^2 + M^2 + N^2)\, x - 2\, KMN = 0 \ldots (19)$$

Cette équation, complétement analogue à l'équation (17), ne peut se résoudre généralement que quand $m = n$, par exemple. On a d'ailleurs

$$4rr'^2 = kmn.$$

Ce qui est remarquable, c'est que l'équation (19) s'applique exactement aux distances k, m, n de l'un des centres des trois cercles exinscrits.

VIII. On aurait encore une équation du 3ᵉ degré pour calculer la corde x du tiers de l'arc dont $2q$ est la corde, dans le cercle de rayon r. Les triangles semblables donnent, en effet,

$$x^3 - 3r^2 x + 2qr^2 = 0.$$

Cette équation peut se résoudre généralement, 1° lorsque $q = 0$, 2° quand $q = r$. Dans tous les autres cas, l'équation ne peut se résoudre que par approximation ; mais avec un bon compas, x peut toujours se trouver *en tâtonnant*, et donner une approximation suffisante.

Soit x le côté du polygone régulier de 14 côtés inscrit dans le cercle dont r est le rayon : par des triangles isocèles et semblables, on trouve, pour calculer x, l'équation.

$$x^3 - rx^2 - 2r^2 x + r^3 = 0.$$

Ici encore il est préférable de tâtonner avec le compas, comme pour le polygone régulier inscrit de 18 côtés, dont le côté x est donné par

$$x^4 + rx^3 - 2r^2 x^2 - 2r^3 x + r^4 = 0.$$

IX. La connaissance des trois angles et du rayon r du cercle circonscrit au triangle t, suffit pour résoudre les quatre triangles qui joignent les centres des quatre cercles inscrit et exinscrits à t. Il en résulte que, 1° le rayon de l'une quelconque des circonférences circonscrites à ces quatre triangles est égal à $2r$; 2° si des centres des cercles exinscrits, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés de t et non sur leurs prolongements, ces perpendiculaires vont se couper au centre du cercle circonscrit au triangle t' joignant les trois centres proposés ; 3° les centres des trois cercles circonscrits aux trois autres triangles sont les intersections, deux à deux, des perpendiculaires abaissées des sommets de t' sur les prolongements des côtés de t ; 4° ces six perpendiculaires sont côtés, égaux à $2r$, d'un hexagone symétrique équivalent à $2t'$; 5° si p désigne le demi-périmètre du triangle t', on aura $t' = 2pr$; 6° la somme des distances du centre du cercle inscrit dans t aux sommets de t' est double de la somme des rayons des cercles inscrit et circonscrit à t' ; et il existe encore plusieurs autres relations remarquables, faciles à découvrir, d'après ce qui précède.

X. Il arrive parfois qu'une équation, contenant plusieurs lignes trigonométriques d'un même arc, suffit pour déterminer cet arc et l'exprimer en degrés ; d'où résulte sa longueur en unités rectilignes lorsque son rayon r est donné numériquement. Il faut pouvoir alors transformer l'équation de telle sorte qu'elle se réduise à une seule ligne trigonométrique et des nombres connus ; et si l'on se rappelle la valeur de cette ligne pour les angles de 30, 60 et 45°, on trouvera, sans le secours des tables, la valeur de l'angle a, dans chacune des équations que voici :

$\text{tang}\, a \,\text{tang}\, \frac{1}{2} a = 1$	$\cot a \cot \frac{1}{2} a = 1$
$2 \sin a \,\text{tang}\, \frac{1}{2} a = 1$	$2 \sin a \cot \frac{1}{2} a = 1$
$2 \sin a \,\text{séc}\, \frac{1}{2} a = 3$	$2 \sin a \,\text{coséc}\, \frac{1}{2} a = 3$
$2 \sin a \pm 2 \cos a = \sqrt{2}$	$2 \sin a + 2 \,\text{coséc}\, a = 5$
$2 \cos a + 2 \,\text{séc}\, a = 5$	$\text{séc}\, a + \text{coséc}\, a = 2\sqrt{2}$
$\text{tang}\, a + \cot a = 2\sqrt{2}$	$\text{coséc}^2 a - \text{séc}^2 a = 2\sqrt{2}$

$\text{séc}^2 a + \text{coséc}^2 a = 8$ | $2 \sin^2 a - 2\cos^2 a = -\sqrt{3}$
$2 \sin a \tang a - 2 \text{séc}\, a = \sqrt{3}$ | $2 \text{coséc}\, a - 2 \cos a \cot a = 1$
$\tang a - \sin a \cos a = \sin^2 a$ | $\cot a - \sin a \cos a = \cos^2 a.$

XI. Non seulement on peut construire l'arc x dans l'équation

$$\text{séc}^2 x + \text{coséc}^2 x - 4 = 4 \cot 2x \sqrt{3};$$

mais de plus x est indépendant de a, b, c, dans le système :

$$2 \tang a = \tang b, \ \sin a = \sin b \sin c,$$
$$[\sin b \cos a \pm \sqrt{(\sin^2 b - \sin^2 a)}] \tang x = \sin a \cos b.$$

On trouve, en effet, $2 \sin 2x = 1$; d'où $2x = 30°$ et $2x = 150°$.

La seconde des trois équations proposées serait l'équation *auxiliaire*, qu'il faudrait poser pour calculer x, au moyen des deux autres. En général, *c'est par des équations auxiliaires que l'on peut calculer les binomes dont les termes ne sont donnés que par leurs logarithmes*, comme dans

$$x = \sin A \pm n \cos B \sin A... \ (20)$$

Il faudra, pour le signe $+$, prendre $\tang^2 v = n \cos B$, et pour le signe $-$, on posera $\cos^2 v = n \cos B$, si le second membre est plus petit que l'unité. Mais si $n \cos B > 1$, on fera $1 + \tang^2 z = n \cos B$; et alors x sera négatif : cela revient à poser $n \cos B = \text{séc}^2 z$.

Dans $x = \sin A \pm n \cos A$, l'équation auxiliaire est $\tang v = n$. Mais si $x = \tang A \pm n \cot A$, il y aura, pour le signe $-$, deux cas à distinguer, comme pour (20). On peut aussi traiter $x = \text{séc}\, A \pm n\, \text{coséc}\, A$.

Dans chacun de ces derniers exemples, si x est donné numériquement, aussi bien que le coefficient n, on pourra calculer l'angle A, aussi bien que dans $x = \tang A \pm n \tang B$, si l'angle B est connu.

XII. Lorsqu'un angle est déterminé par son sinus, son cosinus, sa tangente ou sa cotangente, il a toujours deux valeurs, s'il ne doit pas surpasser 360°. Si donc un problème doit avoir deux ou quatre solutions, lorsque les données et les inconnues sont des droites numériques, ce qui suppose une équation finale du second ou du quatrième degré, il sera avantageux de se servir des angles, comme choses données et inconnues, non seulement parce que l'équation finale s'abaissera alors au premier ou au second degré ; mais surtout parce que le calcul de l'inconnue sera plus simple et plus exact, en recourant, s'il est nécessaire, à des angles auxiliaires.

Par exemple, *un point étant donné sur la bissectrice de l'un des angles* 2a, *formés par deux droites qui se coupent, et à la distance* d *de leur intersection, sommet de* 2 a ; *si l'on veut mener par ce point, une droite telle que sa portion entre les deux droites proposées, ait la longueur connue* c ; on reconnaît d'abord que le problème est susceptible de quatre solutions.

Prenant donc pour inconnue l'angle x, compris entre d et la première partie de c, on trouve aisément

$$\frac{d \sin a}{\sin(x + a)} + \frac{d \sin a}{\sin(x - a)} = c. \qquad 3$$

Posant $d = cn$ et $\cot v = n \cos a$, l'équation proposée, du second degré en $\sin x$, donne, réductions faites,

$$\sin x = \sin a \cot \tfrac{1}{2} v \text{ et } \sin x = -\sin a \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v.$$

Il est donc facile de calculer et d'interpréter les quatre valeurs de x qui donnent les quatre solutions cherchées.

L'angle $2a$ peut valoir 60° ou 90° et tout autre nombre, moindre que 360°. Dans tous les cas, le *minimum* de c répond à $x = 90°$.

XIII. Les principes de la *géométrie analytique plane* conduisent aisément aux équations du problème proposé ; mais alors l'équation finale est du quatrième degré et complète. Prenant en effet, les deux droites proposées pour axes des x et des y obliques, les coordonnées du point donné seront connues et égales à b ; l'équation de la droite cherchée, passant par ce point, sera donc $y - b = n(x - b)$. Posant $v = \cos 2a$ et $c^2 = b^2 k$, l'équation finale en n sera

$$n^4 - 2(1-v)n^3 - (k + 4v - 2)n^2 - 2(1-v)n + 1 = 0.$$

C'est une *équation réciproque*, que l'on peut résoudre en divisant ses deux membres par n^2 et en posant 1 + 1 sur $n = z$; etc.

Enfin, si x est la portion de l'axe des x entre c et l'ordonnée b, l'équation finale en x est

$$x^4 + 2b(1-v)x^3 - (c^2 + 4b^2 v - 2b^2)x^2 + 2b^3(1-v)x + b^4 = 0.$$

On voit la grande influence que peuvent exercer l'inconnue finale et la méthode d'élimination, sur le plus ou moins de facilité, et même sur la possibilité, de résoudre le problème de géométrie numérique proposé. Car si, dans celui qui nous occupe, on prend pour inconnue la seconde partie y de c, troisième côté du triangle dont b et x sont les deux autres côtés, comprenant l'angle $2a$; l'équation finale, du 4e degré en y, se résoudra par *extraction de racine carrée*.

Si le point donné n'était pas situé sur la bissectrice de l'angle des deux axes obliques, mais que son abscisse k fût différente de son ordonnée b, l'équation finale, du 4me degré en n, ne serait plus réciproque. Dans ce cas, le *minimum* de la somme m des deux segments x' et y' interceptés sur les axes des x et des y, par la droite $y - b = n(x - k)$, répond à $x' - k = \sqrt{(kb)}$

XIV. Soit $AB = a$ une tangente en B à la circonférence de rayon r ; on peut construire sur AB les points par lesquels menant des tangentes à la même circonférence, elles divisent en n parties égales à p la perpendiculaire AH sur AB. Si P est le point de AB, d'où la tangente va intercepter sur AH, la partie $AH' = pv$, on trouve

$$(2r - pv)\,AP = av - apv + r\sqrt{(a^2 - 2pvr + p^2v^2)}.$$

Si donc $AH = a = r - np$, il vient $(2n - v)\,AP = 2n(n - v)\,p$.

XV. Connaissant les trois angles A, B, C d'un triangle et le rayon du cercle inscrit, calculer, 1° l'aire du triangle qui joint les points de

contact, 2° le rayon du cercle circonscrit au triangle proposé et l'aire de celui-ci ; 3° l'aire du triangle formé en menant, par les sommets du proposé, des tangentes au cercle circonscrit et le rayon du cercle circonscrit à ce troisième triangle; 4° l'aire du triangle formé en menant, par les sommets du troisième triangle, des tangentes au cercle qui lui est circonscrit et le rayon du cercle circonscrit à ce quatrième triangle; ainsi de suite. On peut aussi calculer les périmètres successifs; et si le triangle proposé est isocèle ou équilatéral, il en sera de même de tous les autres triangles.

XVI. Étant donnés trois cercles égaux, se touchant extérieurement deux à deux, décrire, 1° la circonférence qui les enveloppe en les touchant (ou qui est enveloppée); 2° les trois cercles égaux, qui touchent extérieurement cette circonférence enveloppante, en se touchant deux à deux ; 3° la circonférence qui enveloppe ces trois derniers cercles, en les touchant; et ainsi de suite. (même problème pour quatre ou six cercles égaux).

XVII. On peut décrire le triangle dont on connaît le côté c, le rayon r du cercle circonscrit et celui r' du cercle inscrit ou celui a' du cercle exinscrit, touchant le prolongement de c. (Chaque fois en supposant le problème résolu, on arrive aisément à sa construction).

Ce qui est remarquable, c'est que la relation géométrique entre les côtés numériques et une projection, dans les triangles obliquangles, étant appliquée à la figure proposée, fournit deux relations indépendantes des angles et des côtés du triangle cherché. Désignant en effet, par M et N les distances du centre du cercle circonscrit à ceux des cercles inscrit et exinscrit proposés, on trouve

$$M^2 = r(r - 2r) \text{ et } N^2 = r(r + 2a').$$

Donc si l'un des triangles cherchés existe, il y en aura une infinité à la fois inscrits et circonscrits ou excirconscrits aux deux cercles proposés, de rayon r et r' ou a'. Il est aisé de voir aussi, par ce qui précède, qu'on a

$$a^2 = (a' - r')(4r + r' - a').$$

XVIII. Calculer l'aire du décagone régulier *étoilé*, que forment les diagonales d'un pentagone régulier, dont le côté vaut 100 mètres. On sait que les deux diagonales, partant d'un même sommet, divisent l'angle 108° du pentagone en trois parties égales et que chacune partage une autre diagonale en moyenne extrême raison, la plus grande partie étant longue de 100^m et la plus petite étant le côté du décagone régulier étoilé. On sait de plus que les deux premières diagonales interceptent sur la 3e, le côté du pentagone régulier, de même centre que les deux autres polygones réguliers (à démontrer chaque fois).

Longueurs maximums et minimums.

7. La recherche des *maximums* et des *minimums* de certaines gran-

deurs géométriques, est la plus importante de la comparaison des longueurs, des aires et des volumes : elle peut fournir aux arts des principes d'économie et de meilleur emploi des matériaux. Aussi cette recherche a-t-elle occupé plusieurs géomètres : les uns à l'aide de considérations purement géométriques et les autres par l'analyse transcendante, sont parvenus à des résultats fort remarquables. Mais, dans la géométrie élémentaire, les problèmes de maximums et de minimums, se résolvent très-simplement par l'emploi simultané des considérations géométriques et du calcul : souvent même la plus grande ou la plus petite valeur cherchée est donnée par une équation résoluble comme celles du second degré.

Le tome I des annales de mathématiques contient les solutions, purement géométriques, des problèmes que voici : trouver le point donnant un minimum pour la somme de ses distances, 1° à trois points donnés sur le même plan ; 2° à deux points et une droite; 3° à deux points et une circonférence; 4° à deux droites ou deux circonférences et un point; 5° à trois droites ou trois circonférences, etc. Tous ces problèmes dépendent, plus ou moins immédiatement de celui-ci :

8. Problème. *Deux points* A *et* B *étant situés d'un même côté du canal rectiligne* MN ; *en quel point* I *de ce canal, l'ouvrier partant du point* B, *doit-il prendre de l'eau, la porter en* A *et revenir en* B, *pour qu'il ait à faire le moindre chemin total possible ?*

Menant avec l'équerre, les perpendiculaires AC et BE sur MN, on pourra mesurer directement AC $= a$ mètres, BE $= b$ et CE $= c$. Il est facile de voir que le *chemin* AIB *sera le plus court possible quand* AC *et* BI *prolongés iront se couper en un point* D, *donnant* CD $=$ CA ; c'est-à-dire *quand les deux angles* AIC *et* BIE *seront égaux.*

Mais comment déterminer le point D, puisqu'il est évident qu'on ne saurait mesurer CD $=$ CA? Le seul moyen est de chercher, avec la fausse équerre, le sommet O sur MN, des deux angles égaux AOC et COD; et encore alors faut-il qu'un aide aille placer un jalon en D et passe le canal (ce qui pourrait ne pas être praticable) : plaçant un jalon I à l'intersection des alignements MN et BD, ce qui est encore une difficulté, on aura sur le terrain la position du plus court chemin AIB, et l'on pourra mesurer AB, BI et IA.

De plus, *dans le projet, il faut calculer le moindre prix de la construction du chemin total* AB $+$ BI $+$ IA $= m$. Car avant de procéder à des constructions quelconques, il importe de connaître les dépenses en argent qu'elles peuvent occasionner, et de faire que ces dépenses soient les moindres qu'il se puisse, sans nuire à la solidité et aux au-

tres qualités de l'ouvrage demandé. Ici donc, pour l'exactitude et la facilité des opérations sur le terrain, il faut y calculer la position du point I et la longueur m du moindre chemin total.

Or, soit CI $= x$; il est clair, par deux triangles semblables et par deux triangles rectangles, qu'on aura simultanément

$$(a+b)\,x = ac \text{ et } m = \sqrt{[(a+b)^2 + c^2]} + \sqrt{[(a-b)^2+c^2]}.$$

Si les mesures directes ont donné $a = 240$, $b = 360$ et $c = 800$, on aura $x = 320$ et $m = 1808^m95$, environ. De plus, si le *sentier* le plus court m doit coûter 10 centimes par mètre de longueur, le moindre prix total sera 180 fr. 90, environ.

Corollaire I. Le triangle ABI a le moindre contour, parmi tous ceux ayant la même base AB et leurs sommets sur la même droite MN.

II. De tous les triangles, de même base et de hauteur de même longueur, celui de moindre périmètre est isocèle.

Scholie I. Il est clair que A et B pourraient être les ouvertures de deux réservoirs, dans lesquels l'eau serait amenée par des tuyaux de conduite, aboutissant à un autre réservoir, qu'il faudrait établir sur le bord MN. Et il est clair aussi que, pour l'économie, les tuyaux et les réservoirs devraient être *cylindriques*.

II. Quelles que soient les conditions d'économie, exigées par le plus court chemin AIB $= v$, non seulement le problème est toujours possible; mais le *minimum* de v et son *maximum* sont donnés par l'équation unique :

$$\sqrt{(a^2 + x^2)} + \sqrt{[b^2 + (c-x)^2]} = v.$$

On verra que pour le maximum de v, a et x sont négatifs ; de sorte qu'alors v est une différence.

9. Problème. *Soit* K *un point donné dans l'angle aigu* CAB, *dont les côtés sont l'un* AB *le bord d'un canal et l'autre* AC *le bord d'un parterre : en quel point* I *de* AB, *l'ouvrier partant du point* K, *doit-il prendre de l'eau et la porter dans un réservoir* H, *à établir sur* AC, *pour que le chemin* KIH *soit un minimum ?*

Menant sur AB la perpendiculaire KE, que l'on prolongera de EF = KE et menant FH perpendiculaire à AC ; cette perpendiculaire coupera AB au point I demandé (facile à démontrer). Il faut que l'angle CAB soit aigu; sans quoi le pied H ne tomberait pas sur AC.

Ici pour déterminer les deux points I et H, *sans sortir de l'angle* CAB, on mène, par le point K, la perpendiculaire KG sur AC ; on marque le point N où GK va couper AB; on prend EI = EN et l'on cherche avec l'équerre, le pied H de la perpendiculaire IH à AC : on a ainsi les points I et H du plus court chemin demandé KIH, que l'on peut mesurer directement.

Scolie I. Si l'on veut trouver, dans l'intérieur d'un triangle, le point dont la somme des distances aux trois côtés soit un minimum; tant que le triangle ne sera pas équilatéral, le problème sera impossible; et il sera indéterminé, si les trois côtés sont égaux. Car la condition du minimum est que les trois distances fassent trois angles égaux autour du point cherché.

II. Si les portes de quatre habitations sont aux sommets d'un quadrilatère convexe et que les propriétaires veuillent établir un puits, dans l'intérieur de la figure, et le joindre aux quatre portes par quatre chemins pavés, coûtant chacun 60 centimes le mètre de longueur; si d'ailleurs chaque propriétaire doit payer le quart du prix de la construction du puits (qui leur sera commun) et une partie de celui des quatre chemins, en *raison inverse* de la longueur du chemin partiel aboutissant à sa porte; on demande où il faudra placer le puits, pour que le prix total des quatre chemins soient un minimum? (R. A l'intersection des deux diagonales, qu'il faudra mesurer et il faudra connaître en outre le prix de la construction du puits, pour pouvoir calculer ce que chacun doit payer.)

10. Problème. *Deux points* A et B *étant situés d'un même côté du canal rectiligne* MN, *sur lequel on veut établir un pont; en quel endroit ce pont doit-il se trouver et où faut-il que les trois branches de route, qui joignent le pont aux deux points* A et B, *se réunissent, pour que la somme* V *de ces trois branches soit un minimum?*

Appelons O le point de réunion des trois branches $OA=x$, $OB=y$ et $OC=z$, OC étant perpendiculaire à MN; de telle sorte que la somme $v=x+y+z$ soit un *minimum*. D'abord si la distance z demeure invariable et qu'on suppose la droite EOF parallèle à MN, il faudra, pour que v et par conséquent $x+y$ soit un minimum, que les deux angles AOE et BOF soient égaux entre eux (n° 8), aussi bien que les deux AOC et BOC.

Ensuite la longueur x demeurant constante, sera le rayon et A le centre de l'arc circulaire, touchant la droite D au point cherché O; donc pour que v et par conséquent $y+z$ soit un minimum, il faut que B soit dans l'angle aigu de D avec MN et qu'en outre les deux angles de BO et CO avec D soient égaux entre eux (n° 9), aussi bien par suite que les deux AOC et AOB.

La somme v ne peut donc être un minimum que quand les trois angles AOC, BOC et AOB valent 120° chacun.

Cela posé, si l'on avait sur le papier la figure *semblable* à celle du terrain, on décrirait sur la corde AB et du côté de MN, le segment capable de l'angle 120°; puis menant par le milieu du restant de la cir-

conférence, une perpendiculaire à MN, cette perpendiculaire couperait l'arc du segment au point cherché O. On voit d'ailleurs que le problème est impossible quand la perpendiculaire ne passe point entre A et B, ou lorsque l'arc coupe MN. Dans chacun de ces cas, la moindre route ne doit avoir que deux branches (n° 8).

Mais il est plus exact et plus simple de procéder sur le terrain même et d'employer le calcul pour déterminer les grandeurs inconnues. On mènera donc avec l'équerre, les perpendiculaires AP et BQ sur MN, puis on les mesurera exactement, aussi bien que PQ. Supposons qu'on ait trouvé $AP = a = 600$ mètres, $BQ = b = 720$ et $PQ = c = 420$.

Imaginant par O la parallèle à MN, coupant AP et BQ en E et F, puis faisant $OE = CP = n$ d'où $OF = c - n$, les deux triangles semblables AOE et BOF donneront :

$\frac{1}{2}x = a - z$, $x = \frac{2}{3}n\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}y = b - z$, $y = \frac{2}{3}(c-n)\sqrt{3}$;

$v = x + y + z = \frac{1}{2}(a + b + c\sqrt{3}) = 1023^{m}\ 73$;

$z = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{6}c\sqrt{3} = 538^{m}\ 76$; $x = 2a - 2z = 122^{m}\ 48$

et $n = \frac{1}{2}x\sqrt{3} = 106^{m}\ 07$.

Ces valeurs déterminent les points C et O. Si d'ailleurs la construction des trois branches coûte 1 fr. 20 par mètre de longueur, le moindre prix total de la construction sera 1228 fr. 48. Mais si la route ne devait avoir que deux branches aboutissant au pont C, sa plus petite longueur serait $1385^{m}21$ et coûterait 1662 fr. 25; ce qui serait 433 fr. 77 de plus que la moindre route à trois branches. Celle-ci est donc préférable.

11. THÉORÈME. *Un triangle* ABC *étant donné, la somme des distances de ses trois sommets à un point* O *de son intérieur est un minimum, lorsque les trois angles compris autour de* O *sont égaux chacun à* 120°.

C'est ce qu'on démontre aisément, d'après le n° 8 et en raisonnant comme dans l'article précédent.

La construction du point O est bien facile quand on a sur le papier la figure semblable à celle du terrain : il reste ensuite à trouver, sur le terrain, le point O homologue à celui obtenu sur le papier. Ici encore, pour l'exactitude et la possibilité des opérations, il faut procéder sur le terrain lui-même et y calculer la position du point O.

Or, soient a, b, c, les valeurs numériques des côtés du triangle ABC, respectivement opposés aux angles A, B, C; soit v la somme des longueurs inconnues $OA = x$, $OB = y$ et $OC = z$. Comme la distance du sommet O de l'angle de 120°, dans chaque triangle partiel, au pied de la hauteur, est *négative* et moitié du côté adjacent, il est clair qu'on a, pour le minimum de la somme v, les quatre équations simultanées :

$$v = x + y + z,\ x^2 + y^2 + xy = c^2,$$
$$x^2 + z^2 + xz = b^2,\ y^2 + z^2 + yz = a^2.$$

La *symétrie* de ces équations permet de les résoudre par des *éliminations particulières*. D'abord soustrayant la seconde équation hors de la somme des deux dernières, puis élevant au carré de part et d'autre, et soustrayant l'équation résultante hors de 4 fois le produit des deux dernières équations proposées, on trouve

$$3\,(xy + xz + yz)^2 = 4\,a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2.$$

Le second membre est connu et peut se calculer par *logarithmes*, après la décomposition en facteurs ; car posant, pour abréger, $2\,p = a + b + c$, il devient $16\,p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)$. Si donc on désigne par $3m^2$ cette valeur, m sera connu et il viendra *l'équation auxiliaire* :

$$xy + xz + yz = m.$$

L'élimination par addition et soustraction est maintenant bien facile, à l'aide de cette équation : on trouve, en posant

$$n = a^2 + b^2 + c^2 \text{ et } 2\,q = m + n\,;$$
$$2\,v^2 = 3\,m + n,\ vx = q - a^2,$$
$$vy = q - b^2 \text{ et } vz = q - c^2.$$

Soient A′, B′, C′ les points où les droites AO, BO, CO vont couper les côtés opposés a, b, c. La droite OA′ étant bissectrice de l'angle BOC, on a $z : y :: \mathrm{CA}' : a - \mathrm{CA}'$; d'où $vy + vz : vz :: a : \mathrm{CA}'$. Substituant donc et procédant de même pour AB′ et BC′, on trouvera

$$(a^2 + m)\,\mathrm{CA}' \quad a\,(q - c^2),$$
$$(b^2 + m)\,\mathrm{AB}' = b\,(q - a^2),$$
$$(c^2 + m)\,\mathrm{BC}' = c\,(q - b^2).$$

Par ces relations, les longueurs CA′, AB′, BC′ étant connues, les points A′, B′, C′, seront déterminés, aussi bien que les trois droites AA′, BB′, CC′ et leur intersection O.

Ce problème est remarquable, non-seulement comme une belle application de l'algèbre à la géométrie ; mais surtout par la manière dont on y élude les difficultés de l'élimination et la complication de l'équation finale, qui devrait naturellement s'élever au 8ᵉ degré. L'équation auxiliaire se trouve d'ailleurs par la double expression de l'aire ABC.

12. THÉORÈME. *Parmi tous les triangles de même angle au sommet et dans lesquels le produit des côtés latéraux est un nombre constant ; 1° celui de moindre base et de moindre périmètre est isocèle ; 2° ces deux minimums sont d'autant plus petits, que l'angle aigu ou obtus est plus petit lui-même.*

Soient a, b, c les valeurs numériques des côtés respectivement op-

posés aux angles A, B, C; supposons ces trois côtés *variables*, mais l'angle A *constant*, aussi bien que le produit bc : suivant que l'angle A est aigu ou obtus, on a, comme on sait,

$$a^2 = b^2 + c^2 \mp 2\,cb',$$

b' désignant la projection de b sur c. Soit n la projection sur c de la longueur 1, prise sur b, à partir du sommet A; on aura $1 : b :: n : b' = bn$ et

$$a^2 = b^2 + c^2 \mp 2\,bcn \text{ ; d'où}$$
$$a^2 = (b - c)^2 + 2\,bc\,(1 \mp n).$$

On a toujours $b' < b$ et $n < 1$; d'ailleurs le produit bc est constant et tout est *positif* dans les deux membres ; il est donc évident que le minimum de la base a répond à $b = c$. Ce minimum est donné par

$$a^2 = 2\,bc\,(1 \mp n).$$

Soit posé $b = m + x$ et $c = m - x$, d'où $b + c = 2\,m$; on aura donc $m^2 - x^2 = bc$ ou $m^2 = bc + x^2$. Comme bc est invariable, le minimum de m et celui de $2\,m$ ou $b + c$ répondent à $x = o$ ou à $b = c$. Ainsi quand $b = c$, la base a et le périmètre $a + b + c$ sont des minimums. Or, ces minimums diminuent avec l'angle A; car A étant aigu, d'où $a^2 = 2\,bc\,(1 - n)$, la projection n augmente et $1 - n$ diminue avec A; tandis que si l'angle obtus A diminue, n diminue, aussi bien que $1 + n$.

SCHOLIE. Ces deux propriétés subsistent également lorsque la somme $2\,m$ est seule constante, avec l'angle A. Si donc on veut couper, dans un triangle donné d'ébène, ayant partout la même épaisseur, un triangle dont $2m$ soit la somme donnée des deux côtés latéraux, il faudra, pour que la section soit un minimum et se fasse le plus aisément possible, choisir le plus petit A des trois angles du triangle d'ébène et prendre, sur les côtés qui le comprennent, à partir du sommet, les longueurs égales à m : on aura les extrémités de la section minimum cherchée.

13. THÉORÈME. *La somme des distances de tout point de l'arc aux extrémités de la corde, croît, depuis une extrémité de cet arc, où la somme est la moindre, jusqu'au milieu du même arc, où elle est la plus grande.*

C'est ce qu'on démontre, d'après les propriétés des angles inscrits dans un même segment et au moyen de la circonférence, ayant pour centre le milieu de l'arc et passant par les extrémités de celui-ci.

COROLLAIRE I. De tous les triangles de même base et de même angle au sommet, celui de hauteur et de périmètre maximums est isocèle.

II. Réciproquement, le triangle isocèle, parmi tous les triangles de même base et de même hauteur, est celui de moindre contour et de plus grand angle au sommet (à démontrer).

14. Théorème. *Parmi tous les polygones d'un même nombre de côtés et inscrits dans le même cercle, celui de périmètre maximum est régulier.*

Soit p le périmètre maximum : si deux côtés consécutifs n'étaient pas égaux, leur point commun ne serait pas le milieu de l'arc total soutendu par ces deux côtés; il existerait donc un autre polygone inscrit, dont un sommet serait le milieu de l'arc total proposé et dont par suite le contour serait plus grand que p (nº 13); celui-ci, parmi tous les périmètres inscrits et du même nombre de côtés, ne serait donc pas un maximum; contrairement à l'hypothèse. Donc deux côtés consécutifs quelconques et par suite tous les côtés de p sont égaux entre eux; donc aussi tous les angles du polygone inscrit, de périmètre p maximum, sont égaux entre eux; donc ce polygone est régulier.

15. Réciproque. *De tous les polygones de* n *côtés, isopérimètres et inscrits dans des cercles différents, le régulier est celui pour lequel la circonférence circonscrite est un minimum.*

Soit p le périmètre commun à deux polygones, dont un seul régulier; soit r le rayon du cercle circonscrit à celui-ci et r' le rayon du cercle circonscrit à l'autre; soit enfin p' le périmètre du polygone régulier de n côtés inscrit dans ce dernier cercle : il est clair qu'on aura simultanément $p < p'$ et $p : p' :: r : r'$; donc $r < r'$ et $2\pi r < 2\pi r'$. Ce qu'il fallait démontrer.

16. Théorème. *De toutes les lignes brisées, formées chacune par trois tangentes, dont deux aux extrémités d'un arc tracé, la plus courte a son troisième contact au milieu de l'arc proposé.*

Soient a et b les longueurs que les deux tangentes, aux extrémités de l'arc proposé, interceptent sur deux troisièmes tangentes, a touchant l'arc au milieu : $2a$ et $2b$ seront donc deux lignes brisées *circonscrites*. Or, menant des extrémités de b des perpendiculaires sur a, on verra, par deux couples de triangles rectangles semblables, que $a < b$ et que $2a < 2b$. Ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire I. De tous les triangles de même angle au sommet et circonscrits au même cercle, le triangle isocèle est celui de moindre base et de moindre périmètre.

II. Lorsque le cercle est *exinscrit* à une suite de triangles de même angle au sommet, tous ces triangles sont isopérimètres; mais celui de moindre base est isocèle.

III. Parmi tous les triangles, de même hauteur et de même angle au sommet, le triangle isocèle est celui de base et de contour minimums.

IV. On démontrerait de même que, *de toutes les droites passant par*

un point de l'intérieur d'un angle tracé et terminées à ses deux côtés, la plus courte en retranche un triangle isocèle.

Comme cette droite, perpendiculaire à la bissectrice de l'angle, est d'autant plus petite que l'angle est plus petit lui-même; on voit que si un *nœud* se trouve dans un triangle d'ébène, ayant partout la même épaisseur, on veut scier ce triangle suivant la plus petite droite possible passant par ce nœud, la section devra être la base du triangle isocèle dont le sommet est celui du plus petit des trois angles du triangle d'ébène.

17. Théorème. *Parmi tous les polygones de chacun* n *côtés et circonscrits à un même cercle, celui de moindre contour est régulier.*

Soit p le périmètre minimum circonscrit : d'après le précédent théorème (n° 16), on verra que tous les côtés du minimum p doivent toucher le cercle au milieu de chacun ; donc le minimum p est le contour d'un polygone régulier de n côtés.

18. Réciproque. *De tous les polygones réguliers isopérimètres, de chacun* n *côtés et circonscrits à des cercles différents, le régulier est celui pour lequel la circonférence inscrite est un maximum* (Démonstration analogue à celle du n° 15).

19. Théorème. *Parmi tous les polygones réguliers, de même apothème* a, *celui du plus grand nombre de côtés a le moindre périmètre.*

D'abord tous ces polygones sont circonscrits au cercle dont a est le rayon. Soient C et C′ les contours de deux polygones réguliers circonscrits : si nous supposons que le premier ait plus de côtés que le second, il est clair que son angle au centre, son côté et son rayon, sont respectivement moindres que l'angle au centre, le côté et le rayon du second; donc le contour C est plus près de la circonférence $2\pi a$ que le contour C′, vu d'ailleurs qu'il a plus de points communs avec elle : il en diffère donc moins que C′ et l'on a $C - 2\pi a < C' - 2\pi a$; donc $C < C'$.

20. Réciproque. *De deux polygones réguliers isopérimètres, celui du plus grand nombre de côtés a aussi le plus grand apothème.*

Soit p le périmètre commun; soient a et a' les apothèmes des deux polygones réguliers dont le premier a le plus de côtés : si nous appelons p' le périmètre d'un troisième polygone régulier, ayant autant de côtés que le premier et même apothème a' que le second, dont p' est le périmètre, il suit du théorème précédent (n° 19) qu'on aura $p' < p$. Mais $p : p' :: a : a'$; donc puisque $p > p'$, on a aussi $a > a'$ et $2\pi a > 2\pi a'$.

Scholie I. *De deux polygones réguliers, de même rayon* r, *celui qui a le plus grand nombre de côtés a aussi le plus grand périmètre* ; comme approchant plus que l'autre de la circonférence circonscrite.

II. Réciproquement, *de deux polygones réguliers isopérimètres, celui du plus grand nombre de côtés a le moindre rayon.* Il aurait le plus grand périmètre, s'il avait le même rayon que l'autre ; il faut donc que son rayon diminue.

21. Propositions. Voici plusieurs propositions à démontrer :

I. De tous les parallélogrammes, de même base et de même hauteur, le rectangle est celui de moindre périmètre. Réciproquement, de tous les parallélogrammes isopérimètres, de même base, celui de plus grande hauteur est le rectangle.

II. La flèche est à la fois le maximum des distances de tous les points de l'arc à la corde, et le maximun de toutes les parties des rayons, situées dans le segment.

III. Si du centre on abaisse une perpendiculaire à la droite hors du cercle, les parties de cette perpendiculaire entre la circonférence et la droite, sont la plus petite et la plus grande distance entre ces deux lignes.

IV. De toutes les droites terminées à deux circonférences, l'une hors de l'autre, la plus grande passe par les deux centres et la plus petite fait partie de la plus grande.

V. Lorsque deux cercles se coupent, de toutes les droites menées par l'un des points d'intersection et terminées aux deux circonférences, la plus courte est la corde commune et la plus longue est parallèle à la droite des centres.

VI. Une droite étant donnée à volonté sur un côté d'un angle tracé, quel est sur l'autre côté le point où l'on voit la droite proposée sous un angle maximum et où elle paraît la plus longue possible ?

VII. A un triangle donné *circonscrire* le triangle de périmètre maximum, ce triangle étant équilatéral ou semblable à un triangle donné. (Cela revient à décrire des segments capables, en ayant égard à V.)

VIII. *Inscrire* dans un parallélogramme donné, le quadrilatère de périmètre minimum. (La figure inscrite est un parallélogramme (n° 8), qui se réduit à un losange ou à un carré, suivant que la figure proposée est un rectangle ou un carré elle-même.)

IX. Parmi tous les polygones réguliers *inscrits* dans un polygone régulier donné, c'est-à-dire ayant leurs sommets sur ses côtés, celui de contour minimum joint les milieux des côtés du proposé.

X. De tous les polygones réguliers *circonscrits* à un polygone régulier donné, celui de périmètre maximum a ses côtés perpendiculaires aux rayons adjacents du proposé.

XI. Parmi tous les quadrilatères de même somme donnée des deux diagonales, celui de moindre somme des carrés numériques des côtés est un rectangle, dans lequel on peut incliner les diagonales à volonté, sans que la somme minimum change ; mais alors le carré aura un périmètre maximum.

De la Transformation des figures.

22. La *transformation des figures* consiste à leur donner une forme plus simple et mieux appropriée à certains usages utiles, sans altérer leur étendue; en sorte que la nouvelle figure soit équivalente à la proposée, du moins avec une approximation suffisante. Le plus souvent la nouvelle figure doit être un rectangle ou carré, un parallélipipède rectangle ou un cube.

La transformation peut souvent s'opérer *par transposition de parties*, ce qui rend l'équivalence complètement évidente. C'est ainsi que l'on procède parfois dans les arts et métiers, comme pour l'étoffe qui doit faire un habit, comme pour la feuille d'acajou que l'ébéniste doit couper en morceaux dont le rapprochement fasse un rectangle, etc.

23. TRANSPOSITION DE PARTIES. Voici plusieurs exemples remarquables de cette sorte de transformation. (Ce sont des théorèmes faciles à démontrer) :

I. Tout parallélogramme ou triangle ou trapèze peut se changer en un rectangle équivalent, mais de moindre contour.

II. Les quatre triangles égaux, composant un triangle quelconque, peuvent former trois parallélogrammes équivalents à ce dernier et dont deux ont chacun un périmètre moindre que le sien.

III. Tout quadrilatère se change, par simple transposition de parties, en un rectangle équivalent; mais dont le périmètre n'est moindre, du moins avec évidence, que pour le quadrilatère concave.

IV. Les carrés faits sur les côtés de l'angle droit de tout triangle rectangle, se divisent en parties formant le carré construit sur l'hypoténuse. (Pour la démonstration, les deux premiers carrés doivent être hors du triangle et le troisième carré doit le renfermer).

V. Tout carré se compose de deux carrés, plus ou moins le double rectangle compris sous les côtés de ces derniers. Et si dans le trapèze isocèle, les diagonales sont perpendiculaires entre elles, ce trapèze peut se diviser en trois parties dont l'arrangement donne le carré fait sur la hauteur (ce carré ayant un contour moindre).

VI. Deux carrés inégaux et concentriques ont pour différence quatre triangles rectangles égaux, formant, par leur rapprochement, un seul rectangle. (De là, si a, b, c, sont l'hypoténuse et les côtés de l'un des quatre triangles rectangles, il vient $a^2 = b^2 + c^2$).

VII. De deux carrés égaux on peut faire un rectangle ou un carré équivalent, de contour moindre. Réciproquement, les parties de ce dernier peuvent former les deux premiers carrés.

VIII. Avec un hexagone H *symétrique*, on compose aisément un parallélogramme équivalent, ayant pour base la diagonale a qui retranche un triangle de H et pour hauteur la distance d de cette

diagonale au sommet le plus éloigné du pentagone restant ; d'où l'aire $H = ad$.

IX. Avec un octogone symétrique on peut faire un hexagone symétrique et un parallélogramme, en transposant les parties.

X. On peut de même, avec cinq parallélogrammes ou cinq carrés égaux, mis en *croix*, faire un parallélogramme ou un carré équivalent. (Les sommets de la croix sont ceux d'un octogone symétrique équivalent aux 7 cinquièmes du parallélogramme). Réciproquement, tout parallélogramme ou tout carré peut se diviser en parties formant cinq parallélogrammes ou cinq carrés égaux.

XI. Une simple transposition de parties donne un carré équivalent, pourvu que la base soit moitié de la hauteur ou égale à elle dans le triangle ou le parallélogramme et le losange, que la hauteur vaille la demi-somme des bases dans le trapèze et que, dans le quadrilatère, une diagonale soit la demi-somme de ses distances aux deux sommets opposés.

XII. Tout polygone régulier peut se diviser, de plusieurs manières, en parties dont le rapprochement forme un rectangle équivalent, et celui-ci peut se changer en un autre, de hauteur double ou triple, et même en un carré, si le rapport de ses deux dimensions est un carré numérique. Quand ce rapport est $6\sqrt{3}$, il en résulte un hexagone régulier.

XIII. Avec sept hexagones réguliers égaux, on peut en composer un seul, par simple transposition ; et réciproquement, on peut diviser tout hexagone régulier en parties dont les rapprochements donnent sept hexagones réguliers égaux.

XIV. Soit P un prisme *oblique* (pouvant être un cylindre); soit b sa base, h sa hauteur, a une arête latérale et b' la section plane perpendiculaire à cette arête : les deux parties de P, qui en résultent, peuvent se réunir en un prisme *droit* P'. équivalent à P, de base b' et de hauteur a, ayant une surface totale moindre que celle de P et moindre somme d'arêtes.

Corollaire. Il est clair que les deux angles (ah) et (bb') sont égaux et qu'ainsi $h = a \cos(ah)$ et $b' = b \cos(ah)$: donc $bh = ab'$. Mais on sait que $P' = ab' = bh$; donc aussi $P = bh$. Tel est donc un moyen, également très-simple, de parvenir aux expressions des volumes de tout prisme et de tout cylindre.

Scholie. Si P est un parallélipipède oblique, P' sera un parallélipipède *droit* équivalent, et celui-ci peut se changer, par simple transposition, en un parallélipipède *rectangle* P'', de surface totale moindre que celle de P' et de moindre somme d'arêtes. De sorte que *la surface totale et la somme des douze arêtes vont en diminuant, en passant de* P *à son équivalent* P', *de* P' *à son équivalent* P'' *et même de* P'' *au cube équivalent* ; ce qui est remarquable.

XV. Soit P un prisme *tronqué*(pouvant être un cylindre); soit b sa base, ayant un *centre de symétrie*, aussi bien que la section b', non parallèle à b. Soit a la droite qui joint les deux centres de symétrie et n le nombre des arêtes latérales, celles-ci ayant par conséquent na pour somme : si par le centre de b' on mène un plan parallèle à b, il en résultera un prisme P′ équivalent à P ; car la portion ajoutée à P est *symétrique* et équivalente à la portion retranchée. Et de même, les surfaces latérales de P et de P′ sont équivalentes.

24. Simplification des figures I. La *simplification des figures* se présente dans les arts et surtout dans l'agriculture, soit pour faciliter le labourage des terres, soit pour diminuer les frais de clôture, d'un pré, d'un jardin, etc. Car sous la même étendue superficielle, une figure plus simple peut avoir un contour plus petit, comme on l'a déjà vu pour le rectangle équivalent au triangle et au trapèze.

II. Pour que l'emploi de la charrue soit le plus commode possible, dans la culture des terrains, il faut que le *champ* soit un rectangle, un parallélogramme, un trapèze ou composé de plusieurs trapèzes de même hauteur, mis bout à bout, par des côtés latéraux communs. Mais divers obstacles, qu'on ne saurait écarter, empêchent souvent qu'il en soit ainsi.

III. Lorsque rien ne limite les opérations à effectuer sur le terrain et que toutes les conditions de la simplification peuvent se réaliser, il sera utile à deux propriétaires de remplacer, par un rectangle ou du moins un parallélogramme équivalent, le champ polygonal de l'un, enclavé dans le terrain de l'autre. La base du parallélogramme cherché devant se trouver sur le chemin adjacent au terrain, on pourra, d'après le mesurage des aires, avoir égard à la différence des *rapports annuels*, si elle existe, d'après des estimations exactes.

IV. Si le terrain polygonal est un quadrilatère quelconque, on le change en un triangle équivalent, ayant pour base une diagonale et pour sommet le point obtenu en prolongeant, hors la figure, la première partie de l'autre diagonale, d'une longueur égale à la seconde partie. Tel est le procédé le plus simple et le plus exact, pour transformer le quadrilatère en un triangle équivalent.

Mais si l'on veut avoir un parallélogramme équivalent au quadrilatère, il faudra d'abord se donner la longueur de la base, si elle n'est pas déterminée par des conditions particulières; puis la hauteur sera quatrième proportionnelle à la base, une diagonale du quadrilatère et la demi-somme des distances de cette diagonale aux deux sommets opposés.

V. Si le terrain est polygonal, d'au moins cinq côtés, on pourra en mesurer d'abord l'étendue superficielle et calculer ensuite la hauteur du parallélogramme équivalent. Et si des obstacles empêchent le mesurage, sur le terrain même, on lèvera le *plan* de celui-ci : on transformera le

polygone résultant sur le papier, en un triangle, puis en un rectangle équivalent, que l'on transportera sur le terrain, par un rectangle *semblable.* Mais ici les causes d'erreurs sont bien plus multipliées que sur le terrain; et il faut des précautions pour avoir un approximation suffisante, qui reste d'ailleurs inconnue.

VI. On démontre que les parallèles aux deux droites joignant les milieux des côtés opposés de tout quadrilatère, menées des extrémités de celles-ci, déterminent le parallélogramme équivalent à ce quadrilatère. Ce moyen de simplification est remarquable et il existe un moyen analogue pour changer tout prisme quadrangulaire en un parallélipipède équivalent.

25. Maximums et minimums I. La recherche des *maximums* et des *minimums* de certaines grandeurs géométriques, qui peuvent *varier* d'après des conditions énoncées, se présente dans la transformation des figures. Par exemple, *il sera utile de transformer un verger triangulaire ou quadrangulaire, demi-cercle ou secteur circulaire, en un carré équivalent*; parce que le contour de ce carré étant toujours moindre que celui du verger proposé, la dépense, pour clôre le carré ou pour entretenir cette clôture, sera toujours plus petite.

II. De même, si une somme d'argent est destinée à payer le mur qui doit entourer le verger à établir dans une propriété; ce verger ne devra être ni un triangle, ni un secteur circulaire, ni un demi-cercle, ni un parallélogramme, ni un trapèze, ni enfin un quadrilatère quelconque, pour le meilleur emploi de la dépense proposée; mais il devra être un carré. C'est que *le carré est plus grand que toute figure plane isopérimètre, de deux, trois ou quatre côtés* (en observant que le demi-cercle et le secteur circulaire sont des figures planes *mixtes*, de deux et trois côtés).

C'est ce qu'on démontre aisément, par le calcul, à l'aide des expressions des aires, pour le demi-cercle, le secteur circulaire, le triangle, le rectangle, le parallélogramme, le losange et le trapèze.

Quant au quadrilatère, observons d'abord que *de tous les triangles de même base et de hauteur constante, celui de moindre périmètre est isocèle*, en vertu du n° 8. Ainsi donc, pour que ce triangle isocèle devienne isopérimètre avec tout autre triangle, de même base, c'est-à-dire pour que son périmètre devienne plus grand, il faut que sa hauteur augmente, et par suite son aire, puisque sa base reste constante. Donc *le triangle isocèle est plus grand que tout triangle isopérimètre, de même base.*

Cela posé, parmi tous les quadrilatères dont le contour C est constant, soit Q celui de plus grande étendue superficielle : si deux côtés consécutifs n'étaient pas égaux entre eux, ils seraient côtés latéraux

d'un triangle, ayant pour base une diagonale de Q, et ce triangle serait moindre que le triangle isocèle isopérimètre, de même base; il existerait donc un quadrilatère, de contour C et plus grand que Q; chose absurde. Donc deux côtés consécutifs quelconques et par conséquent les quatre côtés du quadrilatère maximum Q sont égaux entre eux : déjà ses angles sont droits, puisque le carré est plus grand que tout losange isopérimètre; donc Q est un carré.

III. Réciproquement, *parmi toutes les figures planes équivalentes, de deux, trois ou quatre côtés, le carré a le moindre contour.* Ce carré serait le plus grand, s'il était isopérimètre avec chacune : donc pour lui devenir équivalent, son périmètre doit diminuer. (Ce théorème est appliqué dans le premier exemple ci-dessus, où pour avoir le côté du carré, il faut extraire la racine carrée de la valeur numérique de la figure plane proposée).

IV. Bien que le contour du rectangle soit moindre que celui de tout triangle, trapèze, parallélogramme et losange équivalent, et réciproquement; il existe néanmoins *un losange équivalent à un rectangle donné et de contour moindre :* c'est le losange ayant une diagonale commune avec le rectangle.

V. *Parmi tous les quadrilatères formés avec quatre côtés donnés, dont deux opposés sont égaux, le plus grand est le trapèze isocèle.*

Soient a et b les deux côtés opposés inégaux et c la valeur de chacun des deux côtés égaux et opposés. Supposons $a > b$; soient x et y les prolongements des côtés c jusqu'à leur rencontre; soient t et t' les deux triangles résultants, ayant un angle commun compris par les côtés x et y, dans le premier t et par les côtés $c+x$, $c+y$, dans le second t'. On a

$$t' : t :: (c+x)(c+y) : xy.$$

Soit Q le quadrilatère formé avec les quatre côtés donnés : il est clair que $Q = t' - t$ et qu'ainsi la proportion précédente fournit

$$Q : t = c[c+x+y] : xy.$$

D'ailleurs on sait que pour l'aire t en fonction de ses côtés b, x et y, on a

$$16\,t^2 = 4x^2y^2 - (x^2+y^2-b^2)^2.$$

Eliminant t et posant $x = n+v$, $y = n-v$, on trouve

$$Q = \tfrac{1}{4}(c^2+2cn)\sqrt{\left\{4 - \frac{(2n^2+2v^2-b^2)^2}{(n^2-v^2)^2}\right\}}.$$

On voit que le maximum de Q répond à $v = 0$, c'est-à-dire à $x = y$, d'où $c+x = c+y$. Les deux triangles t et t' sont donc alors isocèles; b est parallèle à a, et par suite le maximum Q est un trapèze isocèle. Ce qu'il fallait démontrer.

D'ailleurs soient A et B les deux angles du quadrilatère Q, adjacents au

côté a : ce quadrilatère étant décomposé en deux triangles rectangles, dont les hypoténuses sont les côtés c, et en un trapèze rectangle, on trouve aisément, pour l'aire Q,

$$2\,Q = ac\,(\sin A + \sin B) - c^2 \sin(A + B).$$

Les deux angles A et B étant variables, soit posé $A = v + x$ et $B = v - x$: il est clair qu'on aura

$$2\,Q = 2ac \sin v \cos x - c^2 \sin 2v.$$

Si donc v a la valeur qui convient au maximum de Q, on voit que ce maximum aura lieu dès que $\cos x$ aura sa plus grande valeur 1, c'est-à-dire dès qu'on aura $x = 0$; d'où $A = B = v$; par suite le quadrilatère maximum est le trapèze isocèle. On a, en effet alors

$$Q = (a - c \cos v)\, c \sin v = \tfrac{1}{2}\,(a + a - 2c \cos v)\, c \sin v = \tfrac{1}{2}\,(a + b) c \sin v.$$

VI. *Le polygone régulier est plus grand que tout polygone isopérimètre, d'un même nombre* n *de côtés.*

Soit P le polygone maximum parmi tous ceux de chacun n côtés et de contour invariable C : en vertu de ce qu'on a vu (II), P doit être *équilatéral*, et d'après ce qu'on vient de démontrer (V), P doit être *équiangle :* donc le polygone maximum P est *régulier*.

VII. Réciproquement, *parmi les polygones équivalents, d'un même nombre* n *de côtés, le polygone régulier* P *a le moindre périmètre.* Car si le périmètre C était le même pour tous les polygones de n côtés, le régulier P serait le plus grand; et P doit diminuer, pour devenir équivalent à chacun d'eux. Or, cela exige que le contour de P diminue; donc, etc.

VIII. *De deux polygones réguliers de même apothème, le plus petit est celui qui a le plus de côtés* ; car il a le moindre périmètre (n° 19).

IX. Réciproquement, *si deux polygones réguliers sont équivalents, celui de plus de côtés a le moindre contour et le plus grand apothème.* Car si l'apothème était le même, le polygone de plus de côtés serait le plus petit; cet apothème doit donc augmenter, etc.

X. *De deux polygones réguliers isopérimètres, celui qui a le plus de côtés est le plus grand.* Il serait le plus petit, si l'apothème était le même; il faut donc que son apothème augmente, non-seulement jusqu'à ce que ce polygone régulier, de plus de côtés, soit équivalent à l'autre, auquel cas son périmètre serait moindre que celui du second; mais jusqu'à ce que les deux périmètres soient égaux.

XI. *Le cercle est plus grand que tout polygone régulier isopérimètre, et réciproquement.* Car le cercle est le polygone régulier du plus grand nombre de côtés.

Plus généralement, une figure plane, *mixte* ou *curviligne*, pouvant être regardée comme un polygone rectiligne, d'un nombre infini n de côtés, infiniment petits, et le polygone régulier du nombre infini

n de côtés étant un cercle ; il suit de (VI et VII), 1° que *le cercle est plus grand que toute figure plane isopérimètre;* 2° que *la circonférence est moindre que le contour de toute figure plane équivalente au cercle.*

Ainsi la plus grande aire plane enfermée par un contour de 1000 mètres, est l'aire du cercle dont le rayon vaut 1000 : 2π.

XII. Les propriétés de maximums et de minimums, dans les figures planes, s'appliquent évidemment aux prismes et aux cylindres, dont ces figures sont les bases. C'est donc pour économiser, le plus possible, la matière, que l'on fait *cylindriques*, plutôt que *prismatiques*, soit les puits ou les réservoirs d'eau, soit les tuyaux destinés à l'écoulement des eaux, au passage de la fumée des poêles, etc. Si donc on veut établir un réservoir d'eau, ayant 1 mètre de profondeur et 30 mètres carrés de surface du fond, dont le pavage coûtera 20 centimes le décimètre carré, tandis que le mur latéral sera payé 10 centimes; il faudra, pour diminuer le plus possible la dépense, non-seulement que le fond soit une figure régulière, mais qu'il soit un cercle et le réservoir, un *cylindre droit.*

XIII. *De tous les polygones de* n *côtés chacun et inscrits dans le même cercle, le plus grand est régulier* (n° 14). Réciproquement, *de tous les polygones de* n *cotés chacun et équivalents entre eux, tous inscriptibles à différents cercles, le polygone régulier a le moindre cercle circonscrit.* Car la circonférence de ce cercle est la plus petite (n° 15).

XIV. *Parmi tous les polygones, de chacun* n *côtés et circonscrits à un même cercle, le plus petit est régulier* (n° 17). Réciproquement, *parmi les polygones, de chacun* n *côtés, équivalents entre eux et tous circonscriptibles à différents cercles, celui du plus grand cercle inscrit est régulier.* Car la circonférence de ce cercle est la plus grande (n° 18).

Corollaire. De là et d'après la *méthode des projections*, on démontre que la plus grande table *elliptique* que l'on puisse couper dans une feuille triangulaire d'acajou, touche les côtés du triangle chacun à son milieu ; son centre coïncidant avec le centre de gravité du triangle. (voyez d'ailleurs p. 241, tome VIII de la correspondance mathématique, etc.)

XV. Dans les arts de construction, on emploie souvent les *anses de paniers* à trois centres (demi-ovale), pour les profils soit des *voûtes* soit des *arches* des ponts. Ces courbes devant présenter des formes agréables à la vue, on est conduit naturellement à *chercher quel doit être le rapport* m *du rayon de l'arc moyen à celui de l'un des deux arcs extrêmes, pour que l'anse de panier, dont on connaît la base et la montée, soit la plus uniforme possible ?* Cela aura lieu évidemment quand le rapport *m* sera un minimum ; or, on calcule ce minimum et l'on construit l'anse de panier cherchée, par la résolution d'une équation du second degré.

XVI. C'est aussi par une équation du second degré que l'on résout le problème des *alvéoles* des abeilles et que l'on reconnaît l'instinct admirable de ces insectes utiles, qui leur fait économiser la cire, de la manière la plus avantageuse.

XVII. Parmi tous les corps géométriques de même surface, la sphère est la plus grande, et réciproquement. Ces deux propriétés peuvent recevoir d'utiles applications : elles sont démontrées, aussi bien que XV et XVI, dans la géométrie, 2e édition.

XVIII. On démontre que, 1° le plus grand de tous les quadrilatères, ayant les mêmes diagonales respectives D et D′, est celui où l'angle (DD′) est droit; 2° il existe une infinité de ces quadrilatères maximums, dont un seul losange, ayant le périmètre minimum; 3° le carré est le plus grand de tous les quadrilatères de même somme $2m$ des diagonales, et réciproquement; 4° le plus petit polygone régulier, inscrit dans un polygone régulier semblable, joint les milieux des côtés de celui-ci; 5° le plus grand polygone régulier, circonscrit à un polygone régulier semblable, a chaque côté perpendiculaire au rayon adjacent; 6° le plus grand de tous les quadrilatères, formés avec trois côtés a, b, c, donnés numériquement, est inscrit dans le cercle dont le diamètre est le quatrième côté inconnu x, et celui-ci se calcule par l'équation homogène

$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)\,x - 2abc = 0,$$

facile à résoudre, lorsque deux côtés sont donnés égaux.

26. Comparaison des figures. C'est par le mesurage que l'on facilite la comparaison et la transformation des figures; mais le mesurage n'est pas toujours nécessaire, comme on le voit par ce qui précède. Voici une suite de propositions, plus ou moins remarquables, à établir sur la comparaison et la transformation des figures :

I. Si l'on a une suite de quadrilatères, dont chacun ait pour sommets les milieux des côtés de celui qui le précède immédiatement; 1° leurs aires deviennent de deux en deux fois plus petites; 2° si le premier est quadrilatère quelconque, convexe ou concave, tous les autres seront des parallélogrammes; 3° si le premier est un rectangle, le second sera un losange, le troisième un rectangle semblable au premier, le quatrième un losange semblable au second, et ainsi alternativement; 4° si le premier est un losange, le second sera un rectangle, le troisième un losange semblable au premier, le quatrième un rectangle semblable au second, et ainsi alternativement; 5° enfin, toutes les figures sont des carrés, si la première en est un.

II. Lorsqu'une suite de quadrilatères est formée en menant par les sommets de chacun des perpendiculaires à ses diagonales adjacentes; 1° si le premier est un quadrilatère quelconque, convexe ou concave,

tous les autres sont des parallélogrammes, devenant de deux en deux fois plus grands que lui (de sorte que si deux quadrilatères étaient semblables, il en serait de même des deux parallélogrammes doubles) ; 2° si le premier est un rectangle, le second sera un losange, le troisième un rectangle semblable au premier, le quatrième un losange semblable au second, et ainsi alternativement; 3° si le premier est un losange, le second sera un rectangle, le troisième un losange semblable au premier, le quatrième un rectangle semblable au second, et ainsi alternativement ; 4° enfin, dans chaque série, les figures deviennent de deux en deux fois plus grandes (1). On aurait aussi un losange, si l'on menait les perpendiculaires sur les diagonales non adjacentes du rectangle.

III. Soit T un triangle rectangle quelconque : si la somme des deux côtés de l'angle droit et la moyenne proportionnelle entre eux, sont l'hypoténuse et un côté d'un second triangle rectangle ; la diagonale du carré fait sur le troisième côté de ce second triangle sera le côté du carré équivalent à l'hexagone formé en joignant, par trois droites extérieures, les sommets des carrés construits extérieurement sur les côtés du premier triangle T.

Si T est équilatéral, l'hexagone vaudra le rectangle dont les dimensions sont le côté de T et son périmètre augmenté du côté du triangle équilatéral 3 T.

Pour le losange, de côté c et de hauteur h, l'octogone résultant est symétrique et équivalent au rectangle $c\,(4c + 3h)$. Suivant que le plus petit angle du losange vaut 30° ou 90°, l'octogone symétrique vaut $\frac{7}{2}\,c^2$ ou $7c^2$.

IV. Connaissant numériquement, dans un quadrilatère, une diagonale, les projections sur elle des deux parties de l'autre diagonale et l'une des deux droites projetantes, calculer l'aire du quadrilatère.

V. Dans tout parallélipipède P, le plan qui joint les milieux de trois arêtes contiguës, retranche le tétraèdre, quarante-huitième de P.

VI. Les milieux des douze arêtes de tout parallélipipède sont les sommets d'un polyèdre *symétrique*, qui en est les 5 sixièmes et qui se trouve compris sous huit triangles et six parallélogrammes, lesquels sont *réguliers* pour le cube.

VII. L'octaèdre dont les sommets sont les centres des six faces de tout parallélipipède P, en est le sixième. Dans le cube, l'octaèdre est *régulier*, et symétrique dans tous les cas.

VIII. Les milieux des arêtes de tout prisme triangulaire sont les 9 sommets d'un polyèdre de onze faces, équivalent aux 3 quarts du prisme.

IX. Les centres de gravité des faces de tout prisme triangulaire sont les sommets d'un hexaèdre, douxième du prisme.

X. Le tétraèdre ayant pour base le triangle qui joint les centres de gravité de trois faces adjacentes, dans tout prisme triangulaire, et pour

sommet le point commun à ces trois faces, est la dix-huitième partie du prisme. (Théorème analogue pour le parallélipipède).

XI. Dans tout prisme régulier hexagonal, les centres des huit faces sont les sommets d'un dodécaèdre symétrique *inscrit*, quart du prisme et terminé par douze triangles réguliers égaux, quand la hauteur du prisme est double de l'apothème de la base.

XII. Dans tout tétraèdre, les milieux des six côtés sont les sommets d'un octaèdre sous double, lequel est *régulier* avec le tétraèdre.

XIII. Dans tout tétraèdre, les centres de gravité des quatre faces sont les sommets du tétraèdre *inversement semblable* et 27 fois plus petit, mais régulier avec lui. On a donc ainsi une suite décroissante de tétraèdres, alternativement semblables, *inversement* et *directement*, ayant tous le même centre de gravité, vers lequel ils tendent sans cesse.

XIV. Dans toute pyramide régulière, les centres de gravité des faces sont les sommets d'une seconde pyramide régulière, inversement semblable à la première et équivalente au vingt-septième de cette première. On a donc ainsi une suite décroissante de pyramides régulières, alternativement semblables, inversement et directement, ayant toutes le même centre de gravité et devenant de 27 fois en 27 fois plus petites.

XV. Construisant un prisme triangulaire sur la plus petite face d'un tétraèdre quelconque, prise pour base, et sur le tiers de l'arête latérale adjacente; ce prisme vaudra le tétraèdre et aura une surface totale moindre.

XVI. Sur le trièdre opposé à la plus grande face latérale de tout prisme triangulaire, on peut construire le parallélipidède équivalent, mais de surface totale plus petite.

XVII. Soit P le volume, S la surface et $12a$ la somme des douze arêtes, dans tout parallélipipède; l'une quelconque de ces trois choses étant donnée invariable, il y a maximum ou minimum *absolu* pour chacune des deux autres, quand P est un cube. (Théorèmes analogues, pour le tétraèdre rectangle.)

Ces théorèmes reçoivent plusieurs applications utiles ; et par exemple, on peut construire le coffre de fer, ayant un mètre cube de capacité, dont le poids et le prix soient les moindres possible, quand le paroi a partout 2 millimètres d'épaisseur.

XVIII. L'octaèdre compris sous un hexagone régulier, trois carrés et quatre triangles équilatéraux, toutes ces figures ayant le même côté, est décuple du tétraèdre régulier fait sur ce côté.

XIX. Connaissant numériquement le rayon de la base et le côté latéral d'un cylindre ou d'un cône droit, on peut calculer le rayon de la sphère dont la surface vaut celle du cylindre ou du cône, et vérifier que son volume est plus grand que celui de chacun de ces derniers.

XX. Les faces latérales d'un cube, dont le côté c est donné, sont d'une substance parfaitement flexible et inextensible, pouvant se séparer librement par les côtés latéraux. On fait glisser parallèlement à elle-même, l'une des bases, suivant l'axe immobile, jusqu'à ce que chaque face latérale devienne une demi-surface cylindrique circulaire, droite et extérieure, puis l'on ferme la figure par quatre fuseaux sphériques égaux. Quelles seront les expressions de la surface et du volume du corps géométrique ou *vase* résultant?

Même problème lorsque les deux bases coïncident et que la figure est fermée par quatre portions de surfaces sphériques égales, comprises chacune par deux petits cercles égaux, bases des cylindres droits résultants. (Mêmes problèmes pour le prisme triangulaire régulier et équilatéral).

XXI. Si les diagonales $2d$ d'un carré C limitent deux segments égaux d'ellipse, d'hyperbole ou de parabole, se coupant suivant la droite h perpendiculaire au plan de C, et si de plus chacun des côtés du carré se meut parallèlement à lui-même, sur les deux courbes adjacentes; non-seulement le volume G, limité par C et les quatre surfaces courbes résultantes, peut se mesurer et s'exprimer au moyen des valeurs numériques de C, d et h; mais si $h = d$, on aura, pour les deux segments égaux de parabole, $G = \frac{1}{2}$ C d; et $G = \frac{2}{3}$ C d pour les deux demi-cercles égaux. ($h = d$ peut être le rayon du triangle équilatéral C et de trois quadrants. *Voyez* à la p. 32).

Addition et Soustraction des figures.

27. Lorsque les figures, aires planes ou volumes, sont mesurées et évaluées numériquement; on peut les ajouter et les soustraire immédiatement entre elles; ce qui se fait par l'addition et la soustraction des nombres concrets, de même nature, qui les *représentent* respectivement. On peut même, par l'extraction de la racine carrée ou de la racine cubique du nombre résultant, obtenir le côté du carré ou du cube équivalent, soit à la somme soit à la différence des deux aires ou des deux volumes proposés.

Mais si les aires ne sont pas mesurées et que pour cela il faille en lever le plan; au lieu d'effectuer les mesurages, d'après l'échelle de ce plan, il sera plus simple et même plus exact d'opérer, par des tracés, faits sur le plan lui-même, les transformations des figures par voie d'addition, de soustraction, de multiplication, de division ou d'extraction de racine carrée; et cela au moyen de la règle et du compas seuls. Voici plusieurs exemples de l'addition ou de la soustraction graphiques des figures planes, les plus simples.

I. *Si l'on veut construire le parallélogramme* P *équivalent à la somme des deux parallélogrammes tracés* Q *et* R; on prend les bases inférieures de Q et de R pour côtés latéraux d'un triangle T et l'on prolonge les

bases supérieures jusqu'à leur intersection : la base de T et la droite, prise égale et parallèle à celle qui joint l'intersection au sommet de T, sont les deux côtés contigus du parallélogramme cherché P, valant Q + R. C'est ce qu'on démontre aisément.

Il est clair que Q et R pourraient être deux rectangles ou deux losanges : s'ils sont deux carrés, T étant rectangle au sommet, P sera le carré fait sur l'hypoténuse de T, *et ce carré* P *vaudra la somme des carrés* Q *et* R, *faits sur les deux autres côtés.*

Tel est le moyen le plus simple de parvenir à la relation des trois carrés, faits sur les côtés du triangle rectangle. Cette relation importante et les expressions des aires des carrés fournissent toutes les relations entre les droites numériques dans les triangles, rectangles ou non.

II. *Si l'on veut construire le parallélogramme* P *équivalent à la différence des deux parallélogrammes donnés* Q *et* R, il sera plus exact d'opérer sur leurs dimensions. Désignant donc par a et b, c et d, les dimensions connues de Q et de R, celles inconnues de P étant désignées par x et y, puis sous-entendant les unités s et u, la relation P=Q—R devient $xy = ab - cd = a\,(b - cd : a) = a\,(b - z)$, en posant $z = cd : a$ ou $a : c :: d : z$.

On sait construire la droite z, quatrième proportionnelle aux trois droites données a, c, d, (car il faut bien remarquer que le diviseur u disparaît et que les termes de la proportion numérique $a : c :: d : z$ sont devenus des droites réelles); on sait aussi construire la droite $h = b - z$; d'où $xy = ah$.

Ainsi il existe une infinité de parallélogrammes P équivalents à Q — R ou à ah. Mais si l'on se donne la base x de P, sa hauteur y sera déterminée par $x : a :: h : y$ et P pourra se construire, *avec une forme entièrement arbitraire* ; P pourra donc être un rectangle, ce qui est plus simple, ou être *semblable* à un parallélogramme donné, Q par exemple. Dans ce dernier cas, on aura d'abord $x : a :: y : b$, et x ne sera plus arbitraire.

III. On sait tracer le triangle équivalent à tout polygone rectiligne tracé ; on sait aussi, par la moyenne proportionnelle entre les deux dimensions du triangle, décrire le carré équivalent au polygone. On peut donc, avec le compas et la règle, *trouver le côté du carré équivalent à la somme ou à la différence de deux figures planes rectilignes quelconques*. Cela revient, en effet, à construire le triangle rectangle dont deux côtés soient ceux des carrés équivalents aux deux figures données.

IV. Et puisque les figures semblables sont représentées par les carrés faits sur leurs côtés homologues, on voit que, *deux figures*

semblables étant données, on sait en construire une troisième, semblable à elles et équivalente, soit à leur somme soit à leur différence. Chaque fois les côtés homologues des trois figures semblables sont ceux d'un triangle rectangle ; bien facile à tracer, puisque l'on connaît deux de ses côtés et que l'on cherche le troisième, sur lequel on sait décrire la figure demandée. On voit même que l'hypoténuse et les deux projections sur elle *représentent* respectivement les trois figures semblables proposées.

V. En général, on peut tracer la figure semblable à autant de figures planes semblables qu'on voudra et équivalente à leur somme ou à leur différence. Car la construction qui réduit deux figures à une seule, en réduit trois à deux, quatre à trois, etc. Les figures semblables pourraient être des cercles, des demi-cercles, des secteurs ou des segments circulaires, etc.

De pareilles transformations sont utiles ; car au lieu de faire construire deux réservoirs d'eau, à bases circulaires inégales et de même profondeur, il y aura économie de n'en faire établir qu'un seul, de capacité équivalente à la somme de celles des deux premières et de même profondeur.

VI. Avec plusieurs figures planes données, rectilignes ou non, on peut en construire une autre équivalente à leur somme ou à leur différence ; la figure cherchée étant un rectangle de base donnée, un triangle équilatéral, un carré, un polygone régulier ou un cercle. Le compas et la règle suffisent à cet effet ; mais on n'a ainsi que des approximations dont le degré reste inconnu ; et pour peu que les constructions, avec ces deux instruments, ne soient pas très-simples, le calcul est toujours préférable ; parce que son exactitude est certaine et que les erreurs ne proviennent que du mesurage des *données* de la question.

VII. Si a et b sont deux côtés adjacents d'un parallélogramme quelconque P ; les bissectrices de ses angles, tant intérieurs qu'extérieurs déterminent deux rectangles R′ et R, concentriques avec P, ayant les côtés respectivement parallèles et les diagonales égales à $a - b$ et à $a + b$. De plus, la différence $R - R'$ vaut $2P$.

Suivant que P est un rectangle, un losange ou un carré, R et R′ sont deux carrés ; et dans les deux derniers cas, $R' = 0$.

De là résulte le moyen de construire le parallélogramme $\frac{1}{2}P$ équivalent à la différence des deux rectangles proposés R et R′.

VIII. Enfin, si a, b, c, d, sont des valeurs numériques, d'après la même unité superficielle s, de l'hypoténuse et des trois autres faces d'un tétraèdre rectangle, et que an, bn, cn, dn, soient les hauteurs des prismes ou des tétraèdres P, Q, R, S, dont a, b, c, d, sont

les bases ; le premier P vaudra la somme des trois autres Q , R , S. On peut donc ainsi trouver la pyramide ou le prisme ou le cylindre ou le cône équivalent à la somme de trois autres, donnés.

Multiplication des aires.

27. Il s'agit ici de construire le produit, connaissant le multiplicateur, nombre abstrait, et le multiplicande, figure plane qu'on peut toujours remplacer par le carré équivalent ; de sorte qu'on n'aura, le plus souvent, à considérer que des carrés.

I. C'est ainsi que pour doubler un carré, il suffit d'en faire un sur sa diagonale. Mais si l'on considère une suite de triangles rectangles tels, qu'ayant tous un côté commun, le second côté de chacun soit égal à l'hypoténuse de celui qui le précède immédiatement ; les hypoténuses successives, si le premier triangle est isocèle, seront respectivement les côtés des carrés double, triple, quadruple, quintuple, ..., du carré fait sur le côté commun.

De cette manière, on construit le produit d'une aire plane donnée par un nombre entier quelconque n ; ce qui exige le tracé de $n - 1$ hypoténuses. Mais on abrège et l'on diminue les causes d'erreurs en observant que *tout nombre entier, s'il n'est pas un carré, est la somme algébrique de trois carrés, au plus.* Ainsi $29 = 25 + 4$, $31 = 36 - 4 - 1 = 25 + 4 + 4 - 1$, $87 = 81 + 4 + 1 + 1 = 100 - 9 - 4$, etc. On peut donc tracer la droite égale à la racine carrée de tout nombre entier, tel que 512, etc. Il y aura, tout au plus, à construire deux triangles rectangles chaque fois.

II. Le multiple trouvé est un carré ; mais il pourrait être une figure *semblable*, soit à la figure proposée soit à une autre figure, puisque les polygones semblables, rectilignes ou non, sont représentés par les carrés faits sur leurs côtés homologues.

Par exemple, *si la figure* X *cherchée doit être semblable à la figure* P *et valoir* m *fois la figure* Q ; il faudra, a et b étant les côtés des carrés équivalents à P et à Q, construire c et x, dans

$$c^2 = mb^2 \text{ et } a : c :: d : x,$$

d et x désignant les côtés homologues de P et de X. Connaissant x, on sait construire X. On pourrait avoir $m = 1$ et P peut être un rectangle, un parallélogramme, un quadrilatère, un triangle, un cercle, un secteur circulaire, etc.

De plus, P, Q, R, étant trois figures semblables, on sait construire, 1° P, si Q et R sont données dans Q : P :: R : R ; 2° Q et R, si P et les droites m et n sont données dans $Q + R = P$ et $Q : R = m : n$, ou $Q : P = P : R$; 3° enfin, Y étant semblable aux trois P, Q, R, se construit d'après la proportion P : Q :: R : Y.

III. Le multiple demandé peut être une figure *dissemblable* à la proposée, mais d'un même nombre de côtés. Ainsi pour m fois l'aire d'un triangle, d'un parallélogramme ou d'un trapèze, il suffit de prolonger la base de $m - 1$ fois sa longueur, et une diagonale de $m - 1$ fois, pour le quadrilatère. Quant au cercle de rayon r, le rayon x du cercle m fois plus grand est donné par $x = r\sqrt{m}$.

IV. Pour démontrer que *les droites, joignant les sommets* A, B, C, *d'un triangle aux milieux* M, N, P *des côtés opposés, se coupent en un même point ;* il suffit de prolonger, hors du triangle, les droites AM et BN (se coupant en O) des longueurs MD = MO et NE = NO : on verra aisément que CP passe par O. Prolongeant aussi CP de PF = PO, on verra que 3OM = AM, 3ON = BN et 3OP = CP : c'est là un moyen de *diviser en trois parties égales toute droite* AM, *tracée sur le papier.* On reconnaît de plus, que *les six points* A, B, C, D, E, F, *sont les sommets et* O *le centre d'un hexagone symétrique, double du triangle* ABC *et de contour égal aux 4 tiers de la somme des trois droites* AM, BN *et* CP. Le triangle et l'hexagone sont *réguliers* ensemble.

Connaissant les trois côtés, on peut aisément construire ou calculer les trois droites AM, BN et CP. Mais réciproquement, *ces trois droites étant données, il en résulte les côtés et le triangle.* On a, en effet, en posant AM = m, BN = n et CP = p,

$$4m^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2, \quad 9AB^2 = 4(2m^2 + 2n^2 - p^2),$$
$$4n^2 = 2AB^2 + 2BC^2 - AC^2, \quad 9AC^2 = 4(2m^2 + 2p^2 - n^2),$$
$$4p^2 = 2AC^2 + 2BC^2 - AB^2; \quad 9BC^2 = 4(2n^2 + 2p^2 - m^2);$$
$$3(AB^2 + AC^2 + BC^2) = 4(m^2 + n^2 + p^2).$$

Le point O, *centre* de l'hexagone, est dit le *centre de gravité* et mieux le *centre des moyennes distances* du triangle ABC ; parce que *la distance de* O *à une droite ou à un plan quelconque est toujours le tiers de la somme algébrique des distances de* A, B *et* C.

Il est clair d'ailleurs que les trois droites AM, BN et CP divisent à la fois le triangle en trois autres ou en trois quadrilatères, équivalents entre eux, et l'hexagone en trois parallélogrammes équivalents.

V. Si d, e, f, sont des droites qui joignent les sommets du triangle t aux milieux des côtés opposés et que ces droites soient les côtés d'un autre triangle t', on démontre aisément que $t' = \frac{3}{4}t$. Si donc $d + e + f = 2n$, on trouve

$$9t^2 = 16\, n\,(n - d)\,(n - e)\,(n - f).$$

De plus, d étant la base de t', son sommet se trouve en prolongeant, d'une longueur égale à la sienne, la droite qui joint les pieds de e et f. Il y a donc deux triangles t', de même base d, et conséquemment six triangles t', formant trois parallélogrammes différents, bien que ceux-ci valent chacun $\frac{3}{2}t$.

On aurait le triangle triple du proposé t et de même sommet, en prolongeant la base de celui-ci et la droite qui joint le sommet au milieu, chacune d'une longueur égale à la sienne.

Enfin, si l'on construit le parallélogramme ABCD tel que le côté $AB = 2d$, le côté $BC = 2e$ et la diagonale $AC = 2f$; les droites joignant le point A aux milieux des côtés opposés BC et CD, interceptent, sur la seconde diagonale BD, la base du triangle t, dont A est le sommet; et de plus l'aire $ABCD = 6t$.

V. Si en suivant le contour d'un triangle t ou d'un quadrilatère q, on prolonge chaque côté de n fois sa longueur, n étant entier ou fractionnaire, il en résultera les sommets d'un second triangle t' ou d'un second quadrilatère q', pour lesquels on aura

$$t' = t + 3n(n+1)\,t \text{ et } q' = q + 2n(n+1)\,q.$$

Ce qu'il faut bien remarquer, c'est que si t et q sont *réguliers* et de même côté c, t' et q' sont aussi réguliers, mais de côtés inégaux x et y. De plus, on trouve alors

$$x^2 = c^2 + 3n(n+1)\,c^2 \text{ et } y^2 = c^2 + 2n(n+1)\,c^2.$$

Si donc c^2 est pris pour *unité*, ou plutôt s'il est *sous-entendu*, il est clair que $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, donne

$$x^2 = 7, 19, 37, 61, 91, \ldots, \text{ et } y^2 = 5, 13, 25, 41, 61, \text{ etc.}$$

Il est donc facile de construire x et y. On peut supposer n fractionnaire; ce qui donnera plusieurs nombres premiers pour les numérateurs de x^2 et de y^2.

VI. Soit H l'hexagone régulier de côté c : si en suivant le contour, on prolonge chaque côté c de n fois sa longueur, on aura les sommets d'un second hexagone régulier H', de côté x; d'où il viendra simultanément

$$H' = H + n(n+1)\,H \text{ et } x^2 = c^2 + n(n+1)\,c^2.$$

Pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$ $6, 7, \ldots$, le rapport $H' : H$ ou $x^2 : c^2$ devient 3, 7, 13, 21, 31, 43, 57, 73, etc. On peut aussi prendre n fractionnaire.

La construction de l'hexagone régulier étant très-simple et très-précise, aussi bien que celles du carré et du triangle équilatéral, on voit comment à l'aide de la règle et du compas, on peut multiplier, par des nombres donnés, tout carré et par conséquent l'aire plane que ce carré représente; d'où résulte aussi la multiplication des volumes (prismes ou cylindres, pyramides ou cônes).

De la Division des figures.

28. La *division des figures* consiste à les partager chacune en parties équivalentes entre elles ou proportionnelles, soit à des droites données, soit à des nombres connus.

De telles opérations se présentent dans les arts et métiers, comme dans la division et la limitation des terrains, où souvent les lignes de division doivent satisfaire à certaines conditions d'utilité et de convenance, ou d'économie; telles que d'être les plus courtes possible, soit que les unes passent par des points donnés, que d'autres soient parallèles ou perpendiculaires à des droites données de position, etc. Voici plusieurs curieux exemples, pour les arts et métiers :

I. On peut scier un morceau triangulaire d'ébène en plusieurs quadrilatères équivalents entre eux. Les portions sont au fond des prismes quadrangulaires équivalents, puisque le morceau triangulaire a toujours une certaine épaisseur, partout la même.

II. On peut couper un quadrilatère d'acajou en cinq morceaux, dont un parallélogramme, moitié du quadrilatère, et les quatre autres formant deux nouveaux quadrilatères, chacun équivalent au quart du proposé. Si celui-ci est un parallélogramme, il en sera de même des trois autres : s'il est un rectangle ou un losange, il en résultera deux losanges ou deux rectangles égaux.

III. On peut toujours couper dans un carré d'acajou, de côté c, le carré x^2 qui en soit la $(1+n^2)$ ième partie, n désignant un nombre entier. Il suffit de construire quatre triangles rectangles égaux, sur les hypoténuses c, divisées chacune en $1+n^2$ parties égales à y : la première de ces parties sera la projection du premier côté x de l'angle droit, l'autre côté valant nx. Ayant ainsi le côté x du carré cherché, le problème se résoudra avec la règle, le compas et la scie. De plus, les 4 triangles rectangles étant sciés, il reste le carré fait sur $(n-1)x$: ce carré restant est donc 0, x^2, $4x^2$, $9x^2$, $16x^2$,..., suivant que n vaut 1, 2, 3, 4, 5, etc.

IV. Deux menuisiers devant se partager en deux portions équivalentes, un morceau triangulaire d'ébène (prisme droit), qu'ils ont acheté en commun et qui a partout la même épaisseur, on saura leur indiquer comment ils doivent le scier, pour que l'ouvrage soit le plus facile possible ; même lorsque les deux portions doivent être entre elles comme les sommes inégales qu'ils ont déboursées pour faire le prix de l'achat.

V. On sait aussi couper, par une section minimum, dans un tétraèdre rectangle de cuivre massif, un autre tétraèdre rectangle, moitié du premier. (Même problème pour un parallélipipède tronqué.)

VI. Dans une pierre quadrangulaire (prisme droit) d'agate précieuse, on peut couper, de deux manières, un rectangle, pour le dessus d'une boîte. Il faudra naturellement le plus grand des deux rectangles qui peuvent s'en tirer.

Si la pierre est triangulaire, les trois plus grands rectangles qu'elle

puisse fournir, pour le dessus de la boîte à construire, sont équivalents chacun à la moitié du triangle. Mais celui des trois où la base approchera le plus du double de sa hauteur, donnera la plus petite somme des trois *sections* à pratiquer pour l'obtenir.

Si le dessus devait être un *ovale*, il faudrait chaque fois tracer le contour de la plus grande aire *elliptique inscrite.*

VII. Dans le cas de la pierre triangulaire d'agate, si le dessus de la boîte doit être un carré, le problème aura une seule solution, deux ou trois, suivant que le triangle sera obtusangle, rectangle ou acutangle. Pour les deux derniers, on prendra le plus grand des *carrés inscrits*, lequel aura sa base sur le plus petit côté du triangle.

Il existe des carrés *exinscrits*, dont on sait reconnaître le plus grand et le plus petit. On peut voir ce que deviennent les trois carrés, soit inscrits soit exinscrits, lorsqu'une hauteur du triangle est égale à la base correspondante, ou lorsque le triangle se change en un *biangle*, par le parallélisme de deux côtés.

VIII. Dans les opérations sur le terrain, on pourrait avoir à *diviser en trois portions équivalentes, tout polygone plan;* soit par deux droites tirées de deux points opposés, pris sur le contour, soit par trois droites menées d'un point intérieur, l'une joignant un point donné sur le contour, ou bien étant parallèle ou perpendiculaire à une droite donnée de position.

Quelles que soient les conditions particulières auxquelles les droites de division doivent satisfaire, il faut d'abord mesurer l'aire P du polygone proposé; puis, si les droites de division doivent partir d'un point intérieur, l'une devant être perpendiculaire à un côté de P, on mènera celle-ci. On tracera ensuite une seconde droite, à partir du point, de telle sorte que la figure résultante avec la première droite, *paraisse* valoir $\frac{1}{3}$ P. On mesurera donc l'aire A de cette figure; et s'il arrive qu'on ait $A > \frac{1}{3}P$, il faudra retrancher de A le triangle $T = A - \frac{1}{3}P$; chose facile, puisqu'on pourra mener et mesurer la hauteur h de T et calculer sa base x par $\frac{1}{2}hx = A - \frac{1}{3}P$. Ayant ainsi la seconde ligne de division, on trouvera de même la troisième.

IX. C'est ainsi qu'on peut résoudre les problèmes suivants :

1° Un particulier possède une maison et un verger adjacent, clos d'un mur; il veut percer, dans ce mur, une porte telle que le sentier qui la joindra à celle de la maison, divise le verger en deux portions équivalentes; en quel endroit du mur faut-il percer la porte?

2° En quel endroit d'un terrain triangulaire faut-il creuser une citerne pour que les droites joignant les milieux des côtés au centre de l'ouverture circulaire, le divisent en trois quadrilatères équivalents?

3° Deux héritiers doivent se partager également un champ en forme de trapèze, par une droite parallèle aux deux bases; comment tracer cette droite? (La chose est facile, par le mesurage et le calcul, surtout quand on connaît le point où vont se couper les deux côtés latéraux).

4° Il est deux manières de diviser le trapèze T, dont a et c sont les deux bases, en deux parties proportionnelles aux deux droites connues m et n, sans prolonger les côtés latéraux : ou la droite de division aboutit aux deux bases, ou bien elle leur est parallèle. Dans le premier cas, elle est un minimum, si $a > c > h$, h désignant la hauteur du trapèze T; dans le second cas, sa longueur x peut se construire ou se calculer par

$$(m + n)\, x^2 = a^2 n + c^2 m.$$

Sur le terrain, où la règle et le compas ne sauraient s'employer; si l'on désigne par y la longueur que a et x interceptent sur h, il faut encore calculer y par la proportion $a - c : x - c :: h : y$. Les instruments nécessaires pour réaliser la solution, dans ce cas, sont l'équerre et la chaîne d'arpenteur (décamètre).

On peut avoir $m = n$, c peut être nul; et si l'on projète sur un côté latéral de T, les deux parties de l'autre côté, déterminées par x, il en résultera deux trapèzes rectangles, dont les aires sont comme m est à n.

X. Il existe beaucoup des questions utiles auxquelles la *division des champs* peut donner lieu : toutes se résolvent, à peu près, par les méthodes précédentes. Mais l'exactitude des résultats exige des précautions dans les mesures à prendre, avec les instruments, pour avoir des approximations suffisantes et bien connues. Ces approximations dépendent toujours de l'adresse de celui qui opère; lequel, toutes choses égales d'ailleurs, réussira d'autant mieux qu'il sera plus familiarisé avec les principes de la géométrie.

La difficulté relative à l'exactitude sur le terrain, ne tient pas seulement au mesurage des droites; mais aussi à la détermination de leur véritable intersection, aux tracés des parallèles, des perpendiculaires, etc.

Au lieu d'opérer immédiatement sur le terrain, ce qui est plus direct et parfois plus simple et plus exact, il est quelquefois préférable d'en lever le plan; surtout quand certaines opérations directes ne pourraient s'exécuter, à raison de quelques obstacles qui borneraient la vue, ou de droites inaccessibles qu'on ne pourrait mesurer. Mais à cet égard, la seule chose à recommander est l'exactitude; et pour l'obtenir, on voit qu'il faut souvent l'emploi simultané des opérations graphiques et numériques : les unes et les autres sont indispensables pour atteindre complètement le but général de la géométrie.

Comme le calcul est susceptible d'une exactitude complète, on le sub-

stitue, autant que possible, aux procédés graphiques : on ne mesure, sur le terrain ou sur le papier, que les données, strictement nécessaires et suffisantes, puis l'on détermine les inconnues par des équations. On tâche alors, par un choix convenable dans les éliminations, que l'équation finale soit du degré le moins élevé possible.

Par exemple, *connaissant numériquement l'aire* a *d'un triangle, ainsi que les rayons* b *et* c *des cercles inscrit et circonscrit, calculer les trois côtés* x, y, z.

D'après les diverses expressions de l'aire a, on a

$$b(x+y+z)=2a\ ,\ xyz=4ac \text{ et}$$

$$(x+y+z)(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)=16a^2.$$

Posant $bd=a$, ces trois équations symétriques deviennent

$$x+y+z=2d,\ xyz=4bcd \text{ et}$$

$$xy+xz+yz=b^2+d^2+4bc.$$

Or, d'après la composition des coefficients, on voit que les inconnues x, y, z sont racines de la même équation finale

$$v^3-2dv^2+(b^2+d^2+4bc)v-4bcd=0.$$

Si le triangle existe, les trois racines de cette équation seront des nombres positifs (vu d'ailleurs qu'il y a trois *variations*) ; mais on ne saurait les obtenir, sous formes réelles et finies, que pour des valeurs particulières de a, b, c. Si donc $a=84$, $b=4$ et $c=8,125$, la méthode des diviseurs commensurables donne $x=15$, $y=14$ et $z=13$.

L'équation générale en v se décompose en facteurs inconnus, si $d=b+2c$: il vient alors $v=x=2c$. Cela revient à établir entre les racines x, y, z, la relation $x^2=y^2+z^2$.

Il y aurait encore *abaissement* au second degré, si l'on devait avoir $z=y$ ou $z=2y$, etc. On pourrait calculer l'aire a, si l'on se donnait $b=4,8c=65$ et $y=14$.

On peut aussi calculer le troisième côté x *du triangle dont on connaît numériquement les deux côtés* a *et* b, *avec le rayon* r *du cercle inscrit.* Posant $a+b=m$ et $a-b=n$, l'équation finale sera

$$x^3-mx^2-(n^2-4r^2)x+m(n^2+4r^2)=0.$$

Si $a=61$, $b=60$ et $r=5$, on aura $x=11$, d'où $a^2=b^2+x^2$. Les deux autres valeurs de x sont irrationnelles et absolument insignifiantes ; de sorte qu'alors le triangle est unique et rectangle.

XI. *Un verger quadrangulaire, clos d'un mur, doit se diviser en deux portions équivalentes par un autre mur, de même hauteur que le premier; quelle direction doit-on donner à ce mur de division, pour que sa longueur et par suite le prix de sa construction soient les moindres possible ?*

Comme cette longueur, droite minimum, sera d'autant plus petite

que l'angle des deux côtés du quadrilatère, auxquels elle aboutira, sera plus petit lui-même, la première difficulté est de reconnaître ce plus petit angle, qui n'appartient pas à la figure. La seconde difficulté est de tracer le plus petit angle, avec exactitude, par une parallèle au second des côtés proposés, tirée d'une extrémité de l'autre côté. La troisième difficulté est de tracer exactement la bissectrice de ce plus petit angle, ainsi construit. Enfin, la quatrième difficulté est de mener, à cette bissectrice, la perpendiculaire, droite de division cherchée.

On mènera donc une perpendiculaire à la bissectrice, de telle sorte que cette perpendiculaire *paraisse* diviser le quadrilatère proposé en deux portions équivalentes. On mesurera les aires A et B de ces portions; et si $A > B$, mais que la différence $A - B$ ne surpasse pas le 100e de $A + B$, on regardera $A - B$ comme un rectangle, à diviser en deux parties égales, par une perpendiculaire à la bissectrice proposée. Or, cela est facile, puisque la base du rectangle $A - B$ est déjà connue.

Si l'on peut sortir du verger et aller marquer, avec précision l'intersection des côtés, qui comprennent le plus petit angle; si de plus, on peut mesurer les aires des deux triangles résultants; ce qui fera connaître l'aire du triangle, à retrancher, par une droite minimum; celle-ci se trouvera aisément.

XII. On pourrait d'abord lever le plan du quadrilatère; et c'est ce qu'il faudrait faire, *pour un étang ou un bois*, *à diviser en deux portions équivalentes*, *par une droite*, *qu'il faudrait encore rendre minimum.* Or, quand même la figure semblable, obtenue sur le papier, ne serait pas un quadrilatère, il ne serait pas difficile d'y tracer, d'après ce qui précède, la droite minimum cherchée: pour l'obtenir sur le terrain, il faudra, si la figure est un bois, y déterminer, sur chacun des prolongements de cette droite, au moins deux points respectivement homologues à ceux de la ligne du plan. On pourra alors pratiquer la percée demandée, laquelle étant un minimum, exigera le plus petit ouvrage; et l'on pourra accélérer la besogne en attaquant le bois des deux côtés à la fois.

XIII. Dans une propriété, ayant un jet d'eau, on veut établir un parterre hexagonal d'un hectare d'étendue, et le diviser en six portions équivalentes par les *axes* de six allées, aboutissant au jet d'eau et divisant l'espace autour de lui en six angles égaux. Quelles doivent être les longueurs de ces six allées, pour que le prix total de leur construction et de celle du mur, qui doit entourer le parterre, soit un minimum? (Même problème si le parterre devait être triangulaire ou quadrangulaire).

XIV. S'il y a n allées, dont les axes divisent l'espace angulaire autour du jet d'eau en n parties égales, et que l'on connaisse le prix total de

la construction des n allées, ainsi que le prix de chaque mètre de longueur ; le calcul apprend que les allées doivent avoir la même longueur chacune pour que le polygone, dont elles joignent les sommets, soit un maximum. Ce polygone étant régulier, aura en même temps le moindre contour, parmi tous ceux d'un même nombre n de sommets et de même étendue.

XV. Le diamètre AB d'un cercle tracé étant divisé en n parties égales à x ; les demi-circonférences décrites d'un côté de AB, sur les diamètres x, $2x$, $3x$, ..., $(n-1)x$, partant du point A, et les demi-circonférences décrites de l'autre côté de AB, sur les diamètres x, $2x$, $3x$, ... $(n-1)x$, partant du point B, divisent le cercle proposé en n portions équivalentes en surface et en contour.

La figure est fort remarquable, et l'on peut diviser ainsi le cercle en deux parties dont le rapport soit donné. On peut aussi diviser le cercle proposé en n portions équivalentes, par des circonférences concentriques, et faire de ces portions des cercles égaux. On peut enfin changer toute *couronne circulaire* donnée en deux cercles égaux entre eux.

Propositions diverses.

I. Lorsqu'un point mobile, se mouvant en ligne droite, part du côté BC d'un rectangle donné ABCD, pour aller frapper successivement et continuellement les côtés CD, DA, AB et BC, en faisant avec chacun l'angle d'*incidence* égal à l'angle de *réflexion* ; 1° si l'on mène DZ parallèle aux chemins de BC à CD, Z étant sur BC, la somme des quatre chemins décrits par le point mobile, pour revenir sur BC, sera 2DZ chaque fois ; 2° le *maximum* de cette somme sera le double de la diagonale BD du rectangle ; 3° les distances successives du mobile sur BC, à l'extrémité C, forment une *progression arithmétique ;* et il en résulte le moyen de calculer la *position* du mobile, sur chaque côté, après l'avoir rencontré v fois ; 4° le *sens* du mouvement changera dès que le mobile devra rencontrer le prolongement d'un côté, c'est-à-dire dès que la distance sur ce côté sera *négative* ; et il en sera de même si cette distance est *nulle* ; 5° dès que le point mobile rencontre les milieux de deux côtés consécutifs, il rencontre perpétuellement tous les côtés chacun à son milieu ; et la somme des quatre chemins est chaque fois le *maximum* 2BD, tandis que c'est le contour *minimum* de tous les parallélogrammes *inscrits* dans le rectangle proposé. (Ces propriétés et celles analogues, pour le triangle équilatéral, se démontrent aisément, par le calcul, à l'aide de triangles rectangles semblables, dont l'un ait un côté égal à l'unité linéaire).

II. On a une table rectangulaire, dont $2a$ et $2b$ sont les côtés adja-

cents ; on veut placer à la hauteur connue c au dessus de cette table, deux corps lumineux égaux, fournissant la lumière 1, à la distance 1, de telle sorte que les projections des centres de ces corps sur la table, tombent sur la droite qui joint les milieux des petits côtés $2b$, de part et d'autre et à la même distance x du milieu de cette droite. Quelle doit être cette distance x, pour qu'un point du côté $2a$, à la distance donnée d de son milieu, soit le plus éclairé qu'il est possible? (Même problème pour quatre corps lumineux égaux, ou pour une table *elliptique*, les corps étant chaque fois placés *symétriquement*).

Il faut ici construire les valeurs; mais on doit d'abord les obtenir par le calcul; et pour cela il est nécessaire de se rappeler que la lumière se propage en raison inverse du carré des distances. (On voit comment on peut disposer les lumières pour avoir chaque fois le meilleur système possible d'éclairage).

III. Le plancher d'une salle a 14 mètres de long sur 10 de large ; comme les planches sont déformées, par l'effet de l'humidité, on veut remplacer ce plancher par un pavé de marbre, composé de trois sortes de polygones réguliers, ayant tous leurs côtés de la même longueur 0^m2. Or, parmi les dix systèmes possibles, on s'arrête aux deux où l'on réunit, 1° un carré et deux octogones réguliers; 2° un carré, un hexagone et un dodécagone. Comme après qu'ils sont posés, les carrés, les hexagones, les octogones et les dodécagones coûtent respectivement chacun 50 centimes, 80, 95 et 100, on demande lequel des deux systèmes coûtera le moins?

IV. Considérons un pré en forme de trapèze rectangle, dont les valeurs de la hauteur et des deux bases parallèles sont respectivement 200 mètres, 120 et 60. Supposons que la hauteur de l'herbe, sur la plus grande base, soit toujours double de la hauteur de l'herbe, sur la plus petite ; ensorte que le niveau soit un plan, comme le terrain. Supposons d'ailleurs que les brins d'herbe soient uniformément repartis sur le pré et qu'il s'agisse de le diviser, par une perpendiculaire à la hauteur, en deux autres prés, fournissant chacun la même quantité d'herbe : comment calculer, sur la hauteur, le pied de la perpendiculaire demandée? Réponse : c'est en considérant la totalité de l'herbe, fournie par le pré, comme le tronc d'un prisme droit, ayant ce pré pour base. (Ce tronc peut se diviser en deux autres, *semblables* entre eux; quel est le rapport de leurs volumes?)

V. Si l'on veut diviser la sphère, de rayon r donné, en deux segments dont n soit le rapport connu du plus petit à la sphère, il faudra calculer la hauteur du plus petit des deux segments cherchés ; et en la désignant par vr, v étant un nombre inconnu, on aura

$$v^3 - 3v^2 + 4n = 0.$$

Le nombre v sera *rationnel* pour n=1 : 2, 2 : 27, 7 : 27, 11 : 32, 13 : 125, etc. (même problème pour les surfaces).

On ne sait pas résoudre le problème pour deux segments circulaires ; mais si la corde commune est $c = vr$, v étant donné numériquement, aussi bien que r, il est facile de calculer le plus petit des deux segments cherchés, ainsi que le rapport n, après avoir évalué l'arc en degrés (avec le compas, si cet arc est tracé sur le papier).

VI. Dans une citerne, remplie d'eau, l'intérieur est un tronc de cône droit à bases circulaires parallèles, dont la hauteur verticale ou plutôt la profondeur a 3 mètres, tandis que le rayon de l'ouverture (plus petite base horizontale) est long de 0m8 et fait un angle de 30° avec le prolongement du côté générateur adjacent. L'ouverture du tuyau de pompe, qui sert à en tirer l'eau, est à 0m6 du fond ; et comme dans les grandes sécheresses, le niveau de l'eau s'abaisse à 0m1 au-dessous de cette ouverture, quel volume de sable faut-il jeter dans la citerne, pour que le plus grand abaissement du niveau reste à 0m2 au-dessus de l'ouverture du tuyau ? Combien la citerne peut-elle renfermer d'hectolitres d'eau, abstraction du volume de la pompe ? Quelles seraient les dimensions d'une citerne semblable et d'une capacité 8 fois plus petite ? Combien a dû coûter la surface latérale de la surface proposée, pour la revêtir de zinc, payé à raison de 40 centimes le décimètre carré ? Quels sont enfin les rayons et l'angle commun des deux secteurs circulaires concentriques, dont cette surface latérale est la différence ?

VII. Le *chapeau* d'un quinquet est la surface latérale d'un tronc de cône droit, à bases circulaires parallèles ; lequel a respectivement 0m18, 0m1 et 0m025 de côté et de rayons des bases. Comment a-t-on pu tracer sur la feuille de cuivre, les deux secteurs circulaires concentriques, dont la surface latérale proposée est la différence ? Quelle serait la capacité du vase formé par cette surface latérale et deux cercles du même cuivre ? Quel serait enfin le prix de la confection de ce vase, payé à raison de 1 fr. 20 le décimètre carré de surface intérieure ?

VIII. Tracer sur un plan le cercle équivalent à un fuseau sphérique donné, ou à une zône connue, ou qui soit dans le rapport n donné avec la surface de la sphère, de rayon connu. (La surface totale du cube, équivalent au quart du volume de la sphère, est moindre que la surface totale de ce quart).

IX. La surface sphérique peut se partager en polygones réguliers, égaux et finis, de cinq manières différentes, savoir : en 4, 8 et 20 triangles ; en 6 quadrilatères et en 12 pentagones réguliers (de sorte qu'il ne peut exister que 5 polyèdres réguliers) ; mais en outre ,

le volume de la sphère est, sous trois points de vue différents, un polyèdre régulier composé d'une infinité de faces, égales et infiniment petites, ces faces étant ou des triangles réguliers, réunis 6 à 6 autour d'un même sommet, ou des carrés réunis 4 à 4, ou enfin des hexagones réguliers réunis 3 à 3.

C'est ce qu'on démontre aisément par les procédés de l'*analyse indéterminée*. Et comme le polygone sphérique, dont les côtés sont infiniment petits, n'est que la portion du plan tangent, autour du contact, on voit non seulement que le volume de la sphère a pour mesure le produit des mesures de sa surface S et du tiers de son rayon r; mais de plus, que si O désigne l'onglet dont le fuseau F est la base, on a $O = \frac{1}{3} F r$. Et de même, pour le secteur et la pyramide sphériques. On voit aussi que deux sphères sont toujours *semblables*, comme polyèdres réguliers d'un même nombre infini de faces semblables.

X. Une citerne est formée d'un cylindre droit surmonté d'une voûte hémisphérique, percée d'un trou circulaire, dont le centre et ceux des bases du cylindre sont sur une même verticale. L'impossibilité de mesurer *directement* les dimensions intérieures fait employer une longue perche, par laquelle on s'assure que le centre de l'ouverture est verticalement à 8 mètres au-dessus du fond, à $1^{m}5$ du niveau de l'eau et à 10^{m} de la circonférence de la base inférieure. Peut-on, d'après cela, calculer combien il y a d'hectolitres d'eau dans la citerne et combien a dû coûter sa construction, payée à raison de 8 fr. par mètre carré de surface intérieure, celle du fond exceptée?

VI. Si dans une citerne, de même forme que la précédente, on ne pouvait prendre aucune mesure, mais que l'on sût, par le mémoire de l'entrepreneur, que sa capacité est 12π mètres cubes, tandis que la surface, celle du fond exceptée, vaut 14π mètres carrés; le rayon x de chaque base serait donné par l'équation

$$x^3 - 21x + 36 = 0.$$

Mais si la capacité étant toujours 12π mètres cubes, on voulait faire construire la citerne, de telle sorte que la surface intérieure $2m\pi$, celle du fond exceptée, coûtât le moins possible, le mètre carré étant payé à raison de 8 francs; il est clair que x désignant le rayon de chaque base, on aurait à calculer, par la méthode des *dérivées*, le *minimum* de m dans

$$x^3 - 3mx + 36 = 0.$$

XII. Dans le caveau d'une église, on a trouvé un cercueil de plomb, en forme de tronc de pyramide à bases parallèles ABCDE et A'B'C'D'E'. La plus grande est le rectangle ABDE joint au triangle isocèle BCD. La face AA'E'E est un trapèze isocèle, perpendiculaire aux deux bases et dont la hauteur vaut $2^{m}40$, d'après le mesurage direct. De

même, $AE = 0^m64$, $AB = 0^m40$, $BC = CD = 0^m40$ et $A'E' = 0^m40$. D'ailleurs, on s'est assuré que le vide intérieur est un tronc T', *semblable* au premier T, et dont le côté homologue à AB vaut 0^m39. Quel est le prix du cercueil vide, vendu à raison de 80 centimes le kilogramme, le poids spécifique du plomb étant 11,35? (On trouverait aussi le volume du plomb, par l'immersion du cercueil vide dans un bassin d'eau, à faces rectangulaires, et en mesurant exactement les dimensions du parallélipipède d'eau équivalent; mais la difficulté serait de placer le cercueil vide dans le bassin).

XIII. Pour que la somme des projections d'une aire plane donnée a, sur trois plans perpendiculaires entre eux, soit la plus grande possible, il faut que le plan de a coupe les arêtes du trièdre droit aux distances du sommet égales chacune à $\sqrt{(2a)}$.

XIV. Connaissant les aires de plusieurs figures planes, non parallèles entre elles, si on les projète sur un même plan P (à trouver), la somme s des projections sera un maximum lorsque les projections de s, sur trois plans rectangulaires, seront les projections respectives des sommes des projections de toutes les aires proposées sur ces trois plans. (On peut calculer la position du plan P).

XV. De tous les troncs de prismes triangulaires, de même volume, comme ayant les mêmes arêtes latérales respectives et la même section a perpendiculaires à ces arêtes, celui dans lequel la section a joint les milieux des mêmes arêtes, a la moindre somme possible des aires de ses deux bases.

C'est ce qu'on démontre, en désignant par m la somme variable des aires x et y des deux bases et en cherchant le minimum de m, dans les trois équations $x + y = m$, $x = a \cos (ax)$ et $y = a \cos (ay)$; etc.

Corollaires. De là résultent immédiatement les corollaires, que voici : 1° Entre tous les corps de même volume, la sphère est celui de moindre surface; et réciproquement. 2° De toutes les surfaces courbes qui, se terminant à une même circonférence, renferment le même volume terminé par le cercle, la calotte sphérique est celle de moindre étendue; et réciproquement. 3° De tous les segments sphériques, terminés par des calottes de même étendue, mais de rayons différents, le plus grand est une demi-sphère; et réciproquement. (Ces corollaires sont démontrés tome XIII des annales de mathématiques).

XVI. De tous les tétraèdres équivalents entre eux, le régulier est celui de moindre surface et de moindre somme d'arêtes (les réciproques sont vraies). De même, parmi tous les tétraèdres de même somme d'arêtes, le régulier est celui de plus grande surface; et réciproquement. (C'est ce qu'on démontre aisément d'après le théorème XV, énoncé ci-dessus).

XVII. On a un *anneau rond* d'argent massif, dont le diamètre intérieur vaut 0m2 et le diamètre extérieur 0m28 ; on veut le fondre en un vase ouvert par le haut, en forme de cylindre droit, dont la paroi ait partout 0m005 d'épaisseur. Quelles doivent être les dimensions intérieures de ce vase pour que sa capacité soit un maximum ? (Comme le titre de l'argent employé est 900 millièmes, ou celui de l'argent monnayé, dont la pièce d'un franc pèse 5 grammes, on peut calculer la valeur intrinsèque du vase, en supposant que le poids spécifique du métal soit 10,30).

Sa capacité maximum serait-elle différente, si l'intérieur du vase devait être un parallélipipède rectangle, et quelle serait-elle alors?

XVIII. Si par un point de la bissectrice d'un angle tracé, on mène sur cette droite une perpendiculaire et différentes obliques, toutes terminées aux deux côtés de l'angle ; 1° la perpendiculaire est plus courte que toute oblique ; 2° elle intercepte le moindre triangle possible ; 3° la somme des segments que la perpendiculaire détermine sur les côtés de l'angle est un minimum, de même que leur produit et la somme de leurs carrés.

XIX. De tous les triangles circonscrits à un même cercle, l'équilatéral est celui qui a le moindre contour, la moindre surface, le moindre cercle circonscrit, la moindre somme des cercles exinscrits et le moindre triangle joignant les centres de ces trois cercles.

XX. Parmi tous les triangles isopérimètres, l'équilatéral est celui qui a la plus grande surface, le plus grand cercle inscrit, le moindre cercle circonscrit, la moindre somme des cercles exinscrits et le moindre triangle joignant leurs centres.

XXI. Si du sommet de la parabole $y^2 = 2px$, rapportée à ses axes principaux, on abaisse des perpendiculaires sur les tangentes à cette courbe, ces perpendiculaires iront couper chacune l'ordonnée du contact sur la parabole *semi-cubique* $py^2 = 2x^3$. Réciproquement, si la courbe donnée est $py^2 = 2x^3$, la courbe cherchée sera $y^2 = 2px$. On peut calculer les aires A et A′ des demi-segments limités par chaque courbe et par les coordonnées $x = k$ et $y = h$; d'où $h^2 = 2pk$ dans l'une et $ph^2 = 2k^3$ dans l'autre. On peut aussi calculer les expressions des volumes décrits par A autour de l'axe des x et par A′ autour de l'axe des y. Enfin, si la courbe donnée est $a^2y = x^3$, quelle sera la courbe cherchée?

XXII. Le lieu géométrique de tous les pieds des perpendiculaires abaissées, sur les plans qui passent par l'origine des coordonnées rectangulaires, du point de l'axe des x, pour lequel $x = 2a$, est la surface sphérique dont a est le rayon.

XXIII. Le coordonnées étant rectangulaires, l'équation

$$5y^2 + 4z^2 = 20x\ ,$$

représente, comme on sait, le *paraboloïde elliptique*, dont 5 et 4 sont les paramètres principaux. Calculer l'aire de l'une des sections circulaires, faites par la sphère dont le centre, sur l'axe des x, est à la distance 6 de l'origine. Et si, par le point de l'axe des x, pour lequel $x=10$, on mène un plan parallèle à l'axe des y ; quelle doit être la position de ce plan, pour que la projection de l'aire elliptique résultante, sur le plan des xy, soit un cercle ? Quelles seront les expressions des aires du cercle et de l'ellipse en fonctions du nombre π ? (Mêmes problèmes pour l'*ellipsoïde* $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$).

XXIV. Le lieu géométrique du pied de la perpendiculaire abaissée sur tout rayon a du cercle, du pied de l'ordonnée de l'extrémité de ce rayon, est une *lemniscate* dont l'aire est les trois huitièmes de celle du cercle proposé. Ici l'origine des coordonnées rectangulaires est au centre du cercle ; mais si elle est à l'extrémité d'un diamètre $2a$, sur l'axe des x, et que, sur la corde qui joint l'origine à un point quelconque (x', y') de la circonférence, on abaisse une perpendiculaire, tirée du pied de y', le pied de cette perpendiculaire est sur une demi-lemniscate, dont l'aire est les cinq huitièmes de celle du cercle.

XXV. L'origine des coordonnées rectangulaires étant au centre de la sphère, le lieu géométrique du pied de la perpendiculaire, abaissée sur tout rayon a, du pied du z' de l'extrémité (x', y', z') de ce rayon, est la surface algébrique

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2 (x^2 + y^2)^2\ ;$$

c'est la surface de révolution décrite par la première lemniscate du précédent théorème, tournant ici autour de l'axe des z. Le volume engendré, par une demi-révolution, a pour mesure $\frac{5}{24}\pi^2 a^3$. (On aurait encore une surface de révolution, si les perpendiculaires étaient abaissées, sur les plans tangents, du point de l'axe des x, pour lequel $x = a$: alors la courbe génératrice, tournant autour de l'axe de x, limite l'aire mesurée par $1,5\,\pi\, a^2$).

Nota. Dans la p. 225, ligne dernière, au lieu de : sur le, *lisez* leurs ; p. 226, ligne 15, au lieu de : $2\,x$ tang $a - 1 =$ séc$^2\,a$, *lisez* x tang $a - 1 =$ séc a ; ligne 5, en remont., remplacez r par r' ; ligne 9 en remont., remplacez r par $4\,r$.

XII. *Notice sur deux coquilles Colombiennes, du genre* Bulimus,

PAR M. H. NYST,

Contrôleur de garantie à Louvain.

De nombreuses productions naturelles ont été rapportées depuis quelques années des pays lointains et la Malacologie en particulier s'en est considérablement enrichie.

Le jeune et zélé naturaliste Belge qui explore en ce moment la Colombie, M. Funck, vient encore d'adresser récemment à notre ami M. Galeotti un envoi dont faisaient partie quelques coquilles de cette belle et intéressante contrée.

Notre attention s'est portée surtout sur deux *Bulimus*, qui par leur taille et leur aspect nous ont paru inédits et que nous n'avons pu effectivement rapporter à aucune des nombreuses espèces déjà décrites par les auteurs et enregistrées dans les *Symbolæ ad historiam Heliceorum* de M. le docteur L. Pfeiffer, 1re et 2e édition, années 1841 et 1842. M. Galeotti ayant bien voulu se défaire en notre faveur d'un bon exemplaire de chaque espèce et nous autoriser à les faire connaître, nous en donnerons ici une description et une figure qui pourront servir à les distinguer.

1. BULIMUS FULMINANS. Nob. Pl. 7, fig. 1, *a*, *b*.

B. Testâ ovato-oblongâ, imperforatâ, rugulosâ, ventricosâ, fulvo-brunnea strigis flexuosis castaneis, suturâ pallescente; longitudinaliter sulcata, ultimo anfractu magno; aperturâ oblongâ labro incrussato, repando, reflexo, atro-fusco.

Habite la Colombie, dans la province de Cumana.

Cette coquille se rapproche par sa forme des *Bulimus planidens* Michelin et *perdicus* Muller, mais est très-distincte, 1° de la première par son test plus épais, sa taille moins forte, par sa coloration, l'absence de l'ombilic et son sommet plus pointu; 2° de la seconde par sa taille plus allongée, son sommet plus pointu, ses tours moins convexes et l'absence de fente ombilicale. Elle est ovale-oblongue, ventrue; son test quoique solide, est transparent; sa spire pointue au sommet est composée de 6 tours dont les 3 premiers sont très-petits

et lisses; les 4me et 5me sont munis de petites côtes longitudinales et obliques allant de gauche à droite. Ces côtes sont plus prononcées vers les sutures ou la partie supérieure des tours, et interrompues ou comme brisées dans leur longueur; le dernier tour qui est très-grand occupe à peu près les deux tiers de la coquille, il est chagriné un peu obliquement, mais en sens inverse des côtes longitudinales des tours supérieurs, c'est-à-dire allant de droite à gauche; il est en outre pourvu de sillons longitudinaux irréguliers produits par les accroissements; les trois derniers tours seulement sont ornés de fascies longitudinales en zigzag imitant la foudre, caractère qui nous a servi pour la désigner; ces lignes ou fascies sont d'un brun foncé sur un fond d'un brun plus clair et sont toujours plus apparentes sur l'avant dernier tour; le sommet de la spire ainsi que la partie supérieure de chaque tour qui longe la suture est de couleur jaunâtre; cette dernière est profonde et simple. L'ouverture est ovale-oblongue, d'un brun violacé à l'intérieur; elle est évasée, son bord droit est épais, renversé en dehors, d'un brun très-foncé et brillant; le bord gauche est étroit, appliqué sur le ventre de l'avant dernier tour, de couleur brun clair ainsi que la columelle qui forme un pli oblique et tordu.

Cette coquille a 60 millimètres de longueur sur 28 delargeur.

2. BULIMUS FUNCKII. Nob. Fig. 2, *a*, *b*.

B. Testâ ovato-oblongâ, medio ventricosâ, sublævigatâ, crassâ, fusco-nigrâ anfractibus convexis; aperturâ ovatâ, intùs fuscescente; columellâ subtortâ, labro reflexo, incrassato, marginato, pallidè rufo.

Habite les mêmes lieux que la précédente.

Ce Bulime est l'un des plus grands que nous connaissions parmi les espèces de forme oblongue; il se rapproche des *Bulimus chrysalidiformis* et *Mindoroensis* Sowerby. Cette belle coquille est épaisse, ovale-oblongue, ventrue dans son milieu, obtuse au sommet; les tours de spire au nombre de 6 sont larges, convexes, finement plissés contre la suture; le dernier qui est à peu près de la longueur des autres réunis, est dépourvu d'ombilic ou plutôt ne laisse apercevoir qu'une fente ombilicale qui se trouve cachée par le bord columellaire. L'ouverture est ovale-oblongue, d'un brun cendré à l'intérieur, son pourtour est d'un roux clair et sa paroi postérieure, c'est-à-dire la partie de l'avant dernier tour comprise dans l'ouverture est d'un beau brun foncé; le bord droit est très-épais et forme un bourrelet extérieur fort saillant; le bord gauche est étalé, assez épais et lisse; la columelle est épaisse, munie d'un pli obtus, très-oblique et blanchâtre sur le milieu de sa longueur; à l'extérieur toute la coquille est d'un brun foncé presque noir.

Cette espèce a 90 millimètres de longueur sur 40 de largeur.

XIII. *Lignes de courbure de quelques surfaces exprimées par des équations différentielles partielles; et Note sur une propriété de l'hyperboloïde à une nappe et du paraboloïde hyperbolique;*

Par M. J.-B. BRASSEUR,

Professeur de Géométrie descriptive et de Mécanique appliquée à l'Université de Liége.

A cause de la grande généralité dont jouissent les équations différentielles partielles, considérées comme représentant des surfaces, il ne m'a pas paru sans intérêt d'examiner si l'analyse peut conduire à la connaissance des lignes de courbure d'une famille de surfaces exprimées par une même équation différentielle partielle.

Les seuls cas, où cette recherche me paraisse pouvoir conduire à un résultat, sont ceux où les deux racines de $\frac{dy}{dx}$, que fournit l'équation générale des lignes de courbure

$$\frac{dy^2}{dx^2}\left[(1+q^2)s-pqt\right]+\frac{dy}{dx}\left[(1+q^2)r-(1+p^2)t\right]-\left[(1+p^2)s-pqr\right]=0..(A)$$

sont séparables, c'est-à-dire, où la quantité sous le radical, en résolvant cette équation par rapport à $\frac{dy}{dx}$, est un carré parfait. Nous renvoyons, pour l'intelligence de l'équation ci-dessus, ainsi que des surfaces que nous examinons ci-après, à l'ouvrage de Monge: *Application de l'analyse à la géométrie, quatrième édition.*

I.

Lignes de courbure des surfaces cylindriques.

$x = az$, $y = bz$ étant les équations d'une droite quelconque menée par l'origine des axes coordonnés; on a pour l'équation différentielle partielle de toutes les surfaces cylindriques dont les génératrices sont parallèles à cette droite (M. p. 5),

$$ap + bq = 1 \ldots (1)$$

Différentiant partiellement cette équation, d'abord par rapport à x et puis par rapport à y, il vient

$$ar + bs = 0 \ldots (2)$$
$$as + bt = 0 \ldots (3)$$

en substituant dans l'équation (A) les valeurs de r et de t tirées de (2 et 3) et réduisant d'après (1), tous les termes du résultat seront divisibles par s, et l'on aura

$$\frac{dy^2}{dx^2} a\,(b + q) + \frac{dy}{dx}\Big[a\,(a + p) - b\,(b + q)\Big] - b\,(a + p) = 0.$$

Cette équation devient, en faisant $a + p = m$, $b + q = n$,

$$\frac{dy^2}{dx^2} a\,n + \frac{dy}{dx}\Big(\,am - bn\,\Big) - b\,m = 0;$$

en la résolvant par rapport à $\frac{dy}{dx}$ on trouve que la quantité sous le radical est un carré parfait, et l'on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bn - am \pm (am + bn)}{2\,an} \ldots \text{(B)}$$

Prenant le signe $+$, on aura pour l'équation de l'une des deux lignes de courbure : $a\,dy = b\,dx$, dont l'intégrale est, en désignant par α une constante arbitraire,

$$ay - bx = \alpha \ldots (4).$$

Or, cette équation représente un plan vertical parallèle à la droite $x = az$, $y = bz$, et par suite parallèle aux génératrices du cylindre; donc l'une des lignes de courbure n'est autre chose que l'intersection de ce plan avec la surface proposée et par suite une génératrice.

En prenant le signe $-$ dans (B), l'équation de l'autre ligne de courbure sera :

$$ndy + mdx = 0,$$

qui devient en remettant pour m et n leurs valeurs et en remplaçant $pdx + qdy$ par sa valeur dz

$$adx + bdy + dz = 0$$

dont l'intégrale est, en désignant par β une constante arbitraire,

$$ax + by + z = \beta \ldots (5)$$

Cette équation étant celle d'un plan perpendiculaire à la droite $x = az$, $y = bz$ et par suite perpendiculaire aux génératrices du cylindre, il s'ensuit que la seconde ligne de courbure, qui passe par chaque point d'une

surface cylindrique, est également plane et qu'elle est l'intersection de ce plan avec la surface cylindrique, c'est-à-dire, une section droite du cylindre.

Les constantes arbitraires α, β, qui entrent dans les équations (4 et 5), seront déterminées par des valeurs particulières de x, y, z; c'est-à-dire en assignant sur la surface un point par lequel on veut faire passer les deux lignes de courbure.

II.

Lignes de courbure des surfaces coniques.

L'équation différentielle partielle de toutes les surfaces coniques est, en supposant le sommet à l'origine, (M. p. 10),

$$z = px + qy \ldots (1).$$

Différentiant deux fois partiellement cette équation on a :

$$xr + ys = 0 \ldots (2).$$

$$xs + yt = 0 \ldots (3).$$

Substituant les valeurs de r et de t fournies par ces deux équations dans l'équation générale des lignes de courbure, tous les termes seront divisibles par s, et si l'on réduit au moyen de l'équation (1), elle pourra être mise sous la forme.

$$\frac{dy^2}{dx^2}\left(y + qz\right)x + \frac{dy}{dx}\left[x(x+pz) - y(y+qz)\right] - y(x+pz) = 0.$$

et devient en faisant $x + pz = m$, $y + qz = n$

$$\frac{dy^2}{dx^2}nx + \frac{dy}{dx}\left(mx - ny\right) - my = 0.$$

En résolvant cette équation par rapport à $\frac{dy}{dx}$, la quantité sous le radical sera un carré parfait et l'on trouve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-mx + ny \pm (mx + ny)}{2nx} \ldots (B),$$

en prenant le signe $+$, l'équation de la première ligne de courbure sera

$$xdy = ydx, \text{ dont l'intégrale est } y = \alpha x \ldots (4)$$

α étant une constante arbitraire.

Cette équation étant celle d'un plan passant par l'origine, c'est-à-dire, par le sommet du cône, exprime que la première ligne de courbure est plane et comme elle ne peut être que l'intersection de ce plan avec la surface conique, il s'ensuit que c'est une génératrice du cône.

Avec le signe — l'équation (B) donne pour la seconde ligne de courbure

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{m}{n}, \text{ ou bien, } \frac{dy}{dx} + \frac{x + pz}{y + qz} = 0;$$

réduisant au même dénominateur et observant que $dz = pdx + qdy$ on a

$$xdx + ydy + zdz = 0,$$

dont l'intégrale est, en désignant par β une constante arbitraire

$$x^2 + y^2 + z^2 = \beta \ . \ . \ . \ (5).$$

Cette équation, étant celle d'une sphère dont le centre est au sommet du cône, il suit que la seconde ligne de courbure est l'intersection de la surface conique avec la surface d'une sphère dont le centre coïncide avec le sommet du cône.

III.

Lignes de courbure des surfaces de révolution.

L'équation différentielle partielle de toutes les surfaces de révolution est, en faisant coïncider l'axe de révolution avec celui des z. (M. p. 15),

$$py - qx = 0 \ . \ . \ . \ (1)$$

Différentiant partiellement cette équation d'abord par rapport à x, puis par rapport à y, on a :

$$ry - q - sx = 0 \ . \ . \ . \ (2)$$

$$tx - p - sy = 0 \ . \ . \ . \ (3)$$

Substituant dans l'équation générale (A) des lignes de courbure pour r et t leurs valeurs tirées de (2 et 3) et réduisant au moyen de (1), on trouve que tous les termes de l'équation (A) sont divisibles par le facteur $\left(s - \frac{p^2q}{x}\right)$ ou par son égal $\left(s - \frac{pq^2}{y}\right)$ et que l'équation des lignes de courbure des surfaces de révolution peut être mise sous la forme :

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{x^2 - y^2}{yx}\right) - 1 = 0, \text{ ou bien}$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) - 1 = 0$$

Sans résoudre cette équation on reconnaît que les valeurs des deux racines de $\frac{dy}{dx}$ sont respectivement :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\\ \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\end{array}\right\}$$ dont les intégrales sont en désignant par α et β deux constantes arbitraires $$\left\{\begin{array}{l} y^2 + x^2 = \alpha \\ y = \beta x\end{array}\right.$$

Or $y^2 + x^2 = \alpha$, est l'équation d'un cylindre de révolution autour de l'axe des z; donc l'une des lignes de courbure est l'intersection de ce cylindre avec la surface de révolution proposée, intersection qui ne peut être qu'un *parallèle ;* vu que deux surfaces de révolution qui ont même axe ne sauraient se couper que dans un parallèle.

L'autre ligne de courbure a pour équation $y = \beta x$, laquelle est celle d'un plan vertical passant par l'axe des z, c'est-à-dire, par l'axe de révolution; donc l'autre ligne de courbure est l'intersection de ce plan avec la surface de révolution et par suite un *méridien.*

IV.

Lignes de courbure des surfaces des canaux et des surfaces dont la ligne de plus grande pente est une droite d'inclinaison constante.

L'équation différentielle partielle qui exprime une propriété commune à toutes les surfaces engendrées par le mouvement d'une sphère constante de rayon et dont le centre suit une courbe arbitrairement tracée dans le plan des xy, est en désignant par a le rayon de la sphère, (M. p. 32)

$$z^2(1+p^2+q^2) = a^2, \text{ ou bien } z^2k^2 = a^2 \ldots (1)$$

en posant pour abréger $(1+p^2+q^2) = k^2$.
Différentiant deux fois partiellement cette équation on a :

$$pr + qs = -\frac{k^2}{z}p \ldots (2).$$

$$ps + qt = -\frac{k^2}{z}q \ldots (3).$$

Avant de faire la substitution de, r, s, t, dans l'équation générale (A) des lignes de courbure, il convient de préparer celle-ci de manière à faire entrer la quantité k^2 dans chacun de ses termes, alors elle devient

$$\frac{dy^2}{dx^2}\Big[k^2s - p(ps+qt)\Big] + \frac{dy}{dx}\Big[k^2(r-t) - (p^2r - q^2t)\Big] - \Big[k^2s - q(pr+qs)\Big] = 0.$$

Et si maintenant l'on y substitue pour $(ps+qt)$, $(pr+qs)$, $(r-t)$, (p^2r-q^2t) leurs valeurs tirées de (2, 3), tous ses termes deviendront divisibles par le facteur $\left(s+\frac{pq}{z}\right)k^2$, et l'on aura

$$\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\left(\frac{p^2-q^2}{pq}\right)-1=0.$$

Telle est l'équation des lignes de courbure des surfaces des canaux. Si on la résout par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on trouve que la quantité sous le radical est un carré parfait et que les deux lignes de courbure ont respectivement pour équation

$$pdy-qdx=0,\ pdx+qdy=0.$$

Or la première est l'équation de la caractéristique de la surface (M. p. 36); donc tout plan vertical perpendiculaire à l'axe du canal, c'est-à-dire, à la ligne que suit le centre de la sphère génératrice, coupe la surface suivant une ligne de courbure.

L'équation $pdx+qdy=0$ de l'autre ligne de courbure, à cause de $pdx+qdy=dz$, devient $dz=0$ ou $z=\beta$, qui représente un plan horizontal. Donc l'autre ligne de courbure de la surface des canaux est l'intersection de la surface proposée par un plan horizontal.

En traitant de la même manière l'équation $p^2+q^2=a^2$, qui est celle des surfaces dont la ligne de plus grande pente est une droite d'inclinaison constante (M. p. 45), on arriverait à conclure que l'une des lignes de courbure, qui passe par chaque point de ces surfaces, coïncide avec la caractéristique et que l'autre coïncide avec la section horizontale qui passe par le même point.

V.

Lignes de courbure de toutes les surfaces développables.

L'équation différentielle partielle du second ordre de toutes les surfaces développables est (M. p. 82)

$$rt-s^2=0.$$

L'équation générale des lignes de courbure deviendra celle des lignes de courbure des surfaces développables, en y introduisant la condition de $rt-s^2=0$.

Or, en remplaçant dans l'équation (A) rt par s^2 et posant, pour abréger, $qs-pt=m$, on parvient sans peine à la mettre sous la forme.

$$\frac{dy^2}{dx^2}\left(s+qm\right)t+\frac{dy}{dx}\Big[s(s+qm)-t(t-pm)\Big]-s(t-pm)=0\,;$$

et en la résolvant par rapport à $\frac{dy}{dx}$ on trouve encore ici que la quantité sous le radical est un carré parfait, et l'on a

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-s(s+qm)+t(t-pm)\pm\left[s(s+qm)+t(t-pm)\right]}{2t(s+qm)}\ldots(B).$$

En prenant le signe —, il vient pour l'équation de l'une des lignes de courbure.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{s}{t}, \text{ ou bien, } sdx+tdy=0, \text{ ou bien, } dq=0$$

et à cause que cette ligne est en entier sur la surface proposée on a aussi : $rt-s^2=0$, qui devient, à cause de la précédente: $rdx+sdy=0$ ou bien, $dp=0$.

Donc on a pour l'une des lignes de courbure les deux équations

$$\left.\begin{matrix} dp=0 \\ dq=0 \end{matrix}\right\}\text{dont les intégrales sont, } \alpha \text{ étant une constante arbitraire: }\left\{\begin{matrix} p=\alpha \\ q=\varphi(\alpha) \end{matrix}\right.$$

Substituant ces valeurs de p et de q dans $dz=pdx+qdy$ et intégrant l'on a

$$z=\alpha x+\varphi(\alpha)y+\pi(\alpha)\quad\ldots\quad(1)$$

$\pi(\alpha)$ étant une fonction arbitraire de la quantité α que l'on a considérée comme constante dans l'intégration.

Différentiant (1) par rapport à α seul, il vient

$$0=x+\varphi'(\alpha)y+\pi'(\alpha)\quad\ldots\quad(2)$$

et l'une des lignes de courbure sera représentée par le système des équations (1 et 2), qui expriment que cette ligne est une droite et par suite ne peut être qu'une génératrice de la surface proposée ; conséquence à laquelle on arriverait d'ailleurs en faisant subsister les équations (1 et 2) avec l'intégrale de l'équation $rt-s^2=0$.

Ayant reconnu que les génératrices d'une surface développable sont toutes des lignes de première courbure, et sachant d'ailleurs que les deux systèmes de lignes de courbure d'une même surface doivent se couper à angle droit, il ne serait pas difficile de conclure, que les lignes de seconde courbure d'une surface développable doivent être des développantes de l'arrête de rebroussement. Mais il est curieux de rechercher si le calcul peut conduire à la même conclusion.

Prenant maintenant le signes + dans (B); nous aurons pour équation de la seconde ligne de courbure

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t-pm}{s+qm}$$

qui devient, en remettant pour m sa valeur $(qs-pt)$ et pour $pdx+qdy$ sa valeur dz

$$s(dy+qdz)=t(dx+pdz)\quad\ldots\quad(1)$$

On a de plus pour la même ligne l'équation $rt - s^2 = 0$, qui est celle de la surface proposée sur laquelle cette ligne existe tout entière, et qui devient à cause de la précédente

$$r(dy + qdz) = s(dx + pdz) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ces deux équations, qui appartiennent à la même courbe, sont équivalentes à celles de deux de ses projections,

et en y joignant l'équation

$$dz = pdx + qdy \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

résultant de la définition des quantités p et q, on aura trois équations pour la même courbe, qui équivaudront à celles de trois de ses projections, et dont deux quelconques suffiront pour la déterminer.

Substituons dans (1 et 2) la valeur de dz tirée de (3) nous aurons

$$dy\left[(1 + q^2)s - pqt\right] = dx\left[(1 + p^2)t - pqs\right]$$

$$dy\left[(1 + q^2)r - pqs\right] = dx\left[(1 + p^2)s - pqr\right]$$

En posant $(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = h$ et tirant de là successivement les valeurs de $(1 + q^2)r$ et de $(1 + p^2)t$ pour les substituer dans les deux équations qui précèdent, il vient, en observant que $rdx + sdy = dp$ et $sdx + tdy = dq$

$$hdx = (1 + q^2)dp - pqdq \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

$$hdy = (1 + p^2)dq - pqdp \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

et l'équation (3) devient au moyen de ces deux

$$hdz = pdp + qdq \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

remplaçons maintenant h par sa valeur tirée de l'expression qui donne les deux rayons de courbure des surfaces développables ; cette expression est pour les surfaces développables, en faisant $1 + p^2 + q^2 = k^2$ et en conservant à h la même valeur que ci-dessus (M. p. 112),

$$R = \frac{-2k^3}{h \pm h}$$

des deux valeurs de R, fournies par cette équation, une est infinie et ne peut convenir qu'aux lignes de moindre courbure qui sont, comme nous l'avons trouvé, des lignes droites ou génératrices de la surface. La seconde valeur de R, qui est $-\dfrac{k^3}{h}$ et qui donne $h = -\dfrac{k^3}{R}$, est donc la seule pouvant convenir à la ligne de plus

grande courbure qui nous occupe. En substituant pour k sa valeur $-\frac{k'}{R}$, les équations (1′,2′,3′) deviennent respectivement

$$dx = -R\left[\frac{(1+q^2)\,dp - pq\,dq}{k^3}\right]$$

$$dy = -R\left[\frac{(1+p^2)\,dq - pq\,dp}{k^3}\right]$$

$$dz = -R\left[\frac{pdp + qdq}{k^3}\right.$$

Or les quantités entre parenthèses étant des différentielles exactes, ces équations peuvent être mises sous la forme

$$dx = -R\,d\frac{p}{k}$$

$$dy = -R\,d\frac{q}{k}$$

$$dz = R\,d\frac{1}{k}.$$

Comme ces équations sont les mêmes que celles trouvées par Monge (M. p. 177) pour la caractéristique de la surface dont les deux rayons de courbure, en chaque point, sont égaux entre eux, et dirigés du même côté, nous n'avons, pour ainsi dire qu'à transcrire littéralement le procédé suivi par Monge pour les intégrer, en remplaçant l'expression caractéristique par celle de ligne de courbure.

Les trois équations précédentes seraient des différentielles exactes, si le rayon de courbure R était une quantité constante, et alors leurs intégrales seraient complétées par des arbitraires, qui étant toutes trois constantes pour la même ligne de courbure individuelle, et variables d'une ligne de courbure à sa consécutive, seraient fonctions d'une même quantité α, qui particularise la position de cette ligne. Mais le rayon de courbure R n'est pas constant. Si donc on intègre ces équations en regardant R comme constant, il faut que les arbitraires soient non-seulement fonctions de la quantité α, mais encore de R, et que ces fonctions soient telles que les différentielles de chaque équation prises en regardant successivement α et R comme seules variables aient lieu. Représentant donc par φ, ψ et π trois fonctions arbitraires de α et de R, on aura

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{pR}{k} + \varphi(R, \alpha) \\ y &= -\frac{qR}{k} + \psi(R, \alpha) \\ z &= \frac{R}{k} + \varpi(R, \alpha) \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

ces trois fonctions devant satisfaire aux deux systèmes d'équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{p}{k} &= \varphi' \\ \frac{q}{k} &= \psi' \\ -\frac{1}{k} &= \varpi' \end{aligned}\right\} \ldots (2) \qquad \left.\begin{aligned} \varphi'' &= 0 \\ \psi'' &= 0 \\ \varpi'' &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

qui résultent de la différentiation des trois précédentes opérée en regardant successivement R et α comme seules variables. Or les trois équations $\varphi'' = 0$, $\psi'' = 0$, $\varpi'' = 0$ expriment que α n'entre dans aucune des fonctions ; par conséquent si nous regardons désormais les trois fonctions arbitraires φ, ψ, ϖ comme composées de la seule quantité R, ces trois équations seront satisfaites. Quant aux trois autres équations de condition, si l'on fait la somme de leurs carrés, on trouvera

$$\varphi'^2 + \psi'^2 + \varpi'^2 = 1$$

d'où l'on tirera $\varpi' = \sqrt{(1 - \varphi'^2 - \psi'^2)}$

et par conséquent $\varpi = \int dR \sqrt{(1 - \varphi'^2 - \psi'^2)}$

qui tiendra lieu de l'une des trois équations de condition restantes, par exemple de la dernière, et qui servira à déterminer la forme de la fonction surabondante ϖ, d'après celle des deux autres. Quoique cette fonction ϖ soit déterminée, nous la conserverons néanmoins encore pour abréger les expressions.

Les six équations (1 et 2) deviennent donc

$$\begin{aligned} x - \varphi(R) &= \frac{-pR}{k} & \qquad \frac{p}{k} &= \varphi'(R) \\ y - \psi(R) &= \frac{-qR}{k} & \qquad \frac{q}{k} &= \psi'(R) \\ z - \varpi(R) &= \frac{R}{k} & \qquad \varpi &= \int dR \sqrt{(1 - \varphi'^2 - \psi'^2)} \end{aligned}$$

lesquelles, par l'élimination de $\frac{p}{k}$, $\frac{q}{k}$ et en chassant la fonction ϖ, se réduisent aux trois équations suivantes :

$$(x-\varphi)^2+(y-\psi)^2+\left[z-\int dR\sqrt{(1-\varphi'^2-\psi'^2)}\right]^2=R^2$$
$$x=\varphi-R\varphi'$$
$$y=\psi-R\psi'$$

et l'élimination de l'indéterminée R entre ces trois équations produira en x, y, z et deux fonctions arbitraires, deux équations qui seront équivalentes à celles des deux projections de la ligne de courbure.

Pour connaître la signification géométrique du résultat de l'élimination de l'indéterminée R, nous donnerons aux trois équations une autre forme.

Des quatre quantités R, φR, ψR, πR, dont les trois dernières sont d'ailleurs liées entre elles par l'équation $\varphi'^2+\psi'^2+\pi'^2=1$, trois étant fonctions de la quatrième, on peut indifféremment prendre celle d'entre elles que l'on voudra pour quantité principale et regarder les trois autres comme fonctions de cette dernière.

D'après cela, soient $\pi R=\alpha$, $\varphi R=\Phi\alpha$, $\psi R=\Psi\alpha$, les caractères Φ, Ψ indiquant de nouvelles fonctions arbitraires, nous aurons

$$\left(\varphi'^2+\psi'^2+\pi'^2\right)dR^2=\left(1+\Phi'^2+\Psi'^2\right)d\alpha^2$$

d'où l'on tire

$$dR=d\alpha\sqrt{(1+\Phi'^2+\Psi'^2)},\ \text{et}\ R=\int d\alpha\sqrt{(1+\Phi'^2+\Psi'^2)}$$

substituant toutes ces valeurs, nous aurons à la place des trois équations précédentes les trois autres équivalentes

$$(x-\Phi\alpha)^2+(y-\Psi\alpha)^2+(z-\alpha)^2=\left[\int d\alpha\sqrt{(1+\Phi'^2+\Psi'^2)}\right]^2$$
$$x-\Phi\alpha=(z-\alpha)\,\Phi'\alpha$$
$$y-\Psi\alpha=(z-\alpha)\,\Psi'\alpha$$

qui, par l'élimination de la nouvelle indéterminée α, produiront également en x, y, z les deux équations de la ligne de courbure.

La première de ces équations est celle de la surface d'une sphère qui aurait son centre sur une courbe arbitraire, dont les projections auraient pour équations $x=\Phi z$, $y=\Psi z$, le centre étant au point de la courbe correspondant à $z=\alpha$, et son rayon variable étant égal à l'arc de la courbe, compris entre le centre et un autre point constant pris sur la courbe pour origine. Les deux autres équations sont celles des projections d'un diamètre de la sphère tangent à la courbe. Il est évident que pour une même valeur de α, ces trois équations appartiennent au point d'intersection de la surface sphérique et du diamètre tangent à la courbe, et par conséquent à la développante de celle-ci.

D'un autre côté le diamètre de la sphère mobile engendre une surface développable dont la courbe $x = \Phi z$, $y = \Psi z$ est l'arête de rebroussement et dont les génératrices sont toutes perpendiculaires à la développante (ligne de courbure à déterminer).

Ainsi l'analyse présente la seconde ligne de courbure comme étant la développante de l'arrête de rebroussement d'une surface développable quelconque dont les génératrices sont perpendiculaires à cette développante.

Or la surface développable proposée jouit de cette propriété ; car toutes ses génératrices, étant des lignes de première courbure, comme il a été démontré, coupent à angle droit une ligne quelconque de seconde courbure.

Donc toute ligne de seconde courbure d'une surface développable quelconque peut être regardée comme étant la développante de l'arête de rebroussement de cette surface développable.

D'après cela l'analyse nous paraît impuissante pour déterminer les lignes de seconde courbure sans connaître au préalable les lignes de première courbure. Nous n'avons d'ailleurs pas trouvé moyen de déterminer la forme des fonctions Φ, Ψ qu'il faudrait connaître pour construire la développante de la courbe $x = \Phi z$, $y = \Psi z$.

VI.

Note sur une propriété relative à l'hyperboloïde à une nappe et au paraboloïde hyperbolique.

L'équation de l'hyperboloïde à une nappe, rapporté à ses axes et à son centre, est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad . \quad . (1)$$

Si l'on coupe cet hyperboloïde par une sphère concentrique ayant pour rayon $\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)}$, je dis que les deux rayons de courbure de l'hyperboloïde en chaque point de la courbe d'intersection, sont égaux et de signes contraires.

Pour que les deux rayons de courbure en un point d'une surface soient égaux et de signes contraires, il faut que les coordonnées de ce point vérifient l'équation différentielle partielle suivante (M. p. 184):

$$(1 + q^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2)\, t = 0. \quad . \quad . (2)$$

L'équation (1) différentiée partiellement donne successivement

$$p = \frac{c^2 x}{a^2 z}, \qquad q = \frac{c^2 y}{b^2 z},$$

$$r = -\frac{c^4}{a^2 b^2 z^3}(b^2 - y^2), \quad s = -\frac{c^4}{a^2 b^2 z^3} xy, \quad t = -\frac{c^4}{a^2 b^2 z^3}(a^2 - x^2)$$

en substituant ces valeurs de p, q, r, s, t dans (2), on aura une équation en x, y, z, qui sera celle d'une surface ; et si cette surface peut couper celle de l'hyperboloïde, il en résultera qu'en tous les points de la courbe d'intersection, la surface de l'hyperboloïde jouit de la propriété énoncée.

L'équation (2), en y substituant d'abord les valeurs de r, s, t, est divisible par le facteur $\frac{c^4}{a^2 b^2 z^3}$ et devient

$$-(1 + q^2)(b^2 - y^2) + 2pqxy - (1 + p)(a^2 - x^2) = 0, \text{ ou bien}$$

$$y^2 + x^2 - (a^2 + b^2) + (px + qy)^2 - (a^2 p^2 + b^2 q^2) = 0,$$

qui devient, en y mettant à la place de p et de q leurs valeurs,

$$y^2 + x^2 - (a^2 + b^2) + \frac{c^4}{z^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 - \frac{c^4}{z^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = 0.$$

En observant que d'après (1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}$

l'équation précédente se réduit à

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 - c^2$$

Ainsi les points de l'hyperboloïde, qui jouissent de la propriété énoncée, se trouvent sur une sphère concentrique à l'hyperboloïde et dont le rayon $= \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)}$; ce qu'il s'agissait de prouver.

Cherchons maintenant le lieu géométrique des points du paraboloïde hyperbolique en chacun desquels les deux rayons de courbure sont égaux et de signes contraires.

L'équation du paraboloïde hyperbolique rapporté à son sommet et à ses plans principaux est :

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} + 2z = 0 \quad . \ . \ . \quad (1).$$

a et b étant les deux demi-paramètres des paraboles principales.

En différentiant partiellement cette équation (1) on a successivement :

$$p = -\frac{x}{a} \qquad q = \frac{y}{b}$$

$$r = -\frac{1}{a}, \quad s = 0, \quad t = \frac{1}{b}$$

en mettant ces valeurs dans l'équation de condition

$$(1+q^2)\,r - 2\,pqs + (1+p^2)\,t = 0\quad.$$

elle devient

$$\left(1+\frac{x^2}{}\right)\frac{1}{b} - \left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)\frac{1}{a} = 0$$

et se réduit en vertu de (1) à

$$2z = a - b.$$

Cette équation montre que les points du paraboloïde hyperbolique, en chacun desquels les deux rayons de courbure sont égaux et de signes contraires, sont dans un plan horizontal situé au dessus ou au dessous de celui des xy, selon que $a >$ ou $< b$.

XIV. *Considérations générales sur les courbes algébriques,*

Par M. STEICHEN,

Professeur à l'école militaire de Bruxelles.

§. I. Supposons que la courbe la plus générale du degré m soit représentée par l'équation :

$$0 = x^m + (p + qy)\, x^{m-1} + (r + sy + ty^2)\, x^{m-2} + \ldots$$

Coupons cette courbe par une transversale quelconque, que l'on peut cependant prendre parallèle à l'axe des abscisses x, dont la direction est en effet elle-même arbitraire. Les ordonnées des points d'intersection de la droite avec la courbe auront donc une seule et même valeur $y = \beta$. Pour obtenir les abscisses d'intersection, on n'aura qu'à substituer dans l'équation de la courbe la valeur constante $y=\beta$, et résoudre par rapport à α l'équation qui en résulte : or en désignant par $\Sigma\, x$, la somme des racines ainsi obtenues, on trouve évidemment :

$$\Sigma x = -(p + q\beta)$$

Ainsi en nommant X, Y, les coordonnées du centre des moyennes distances des intersections de la transversale avec la courbe, on a :

$$X = \frac{\Sigma x}{m},\ Y = \frac{\Sigma y}{m} = \beta.$$

Supposons maintenant que la transversale se meuve parallèlement à elle-même. Le centre des moyennes distances de ses intersections avec la courbe décrira, dans ce mouvement, une certaine ligne dont on obtient l'équation par l'élimination, de la constante ou du paramètre β. des deux équations précédentes ; on trouvera ainsi :

$$mX + qY + p = 0.$$

Il suit de là que quand une transversale se meut parallèlement à elle-même, le centre des moyennes distances, de ses points de rencontre avec une courbe donnée, décrit une ligne droite.

Définition : C'est cette ligne droite ainsi décrite que l'on peut nommer généralement un *diamètre* de la courbe. Ainsi le diamètre d'une courbe algébrique est la ligne droite qui exprime le lieu des centres des moyennes distances des intersections de la courbe avec un système de cordes ou de sécantes parallèles entr'elles.

De même on pourrait nommer, pour abréger, ***diamètre curviligne*** d'une courbe donnée le lieu des centres de M. D. d'une série de sécantes assujetties à passer par un même point fixe du plan de la courbe proposée.

Connaissant la commune direction d'une série de sécantes parallèles, ou plutôt connaissant la direction constante qu'une transversale conserve dans son mouvement, on conclut de ce qui précède la direction et la position correspondantes du diamètre qu'elle engendre ; et réciproquement.

Le diamètre engendré par une transversale donnée de direction est ce qu'on peut nommer ***le diamètre conjugué à cette direction***, et réciproquement, un diamètre étant donné dans une courbe, la direction de la transversale génétratrice, est la ***direction conjuguée à ce diamètre.***

Étant donné un diamètre dans une courbe de degré m, on peut toujours déterminer la direction de la transversale conjuguée à ce diamètre ; c'est ce qu'on verra plus loin :

Soit un diamètre

$$gx + hy + k = 0\ ;$$

pour que la transversale conjuguée à sa direction soit parallèle à l'axe des abscisses, il faudra avoir :

$$\frac{q}{m} = \frac{h}{g}, \frac{p}{m} = \frac{k}{g}\ ;\ \text{partant :}$$

$q = m\dfrac{h}{g}, p = m.\dfrac{k}{g}$. Et l'équation de la courbe aura la forme :

$$0 = x^m + \left(m.\frac{k}{g} + m.\frac{h}{g}.y\right)x^{m-1} + etc.$$

Définition des Diamètres conjugués.

§ II. Deux diamètres sont dits conjugués entr'eux, lorsque la transversale qui engendre le premier est parallèle à la direction du second, et qu'en même temps la transversale qui engendre le second est parallèle au premier.

Plus simplement : Deux transversales sont *conjuguées* entr'elles, lorsque le diamètre engendré par l'une quelconque de ces transversales est parallèle à l'autre; et les deux diamètres correspondants sont dès lors aussi conjugués entr'eux.

Définition des centres des courbes.

Le centre d'une courbe est le point d'intersection de deux quelconques de ses diamètres. On voit par là qu'une courbe peut n'avoir

qu'un centre unique ou bien une infinité de centres, ou un seul centre placé à l'infini; selon que ses diamètres se coupent en un ou plusieurs points, ou qu'ils sont tous parallèles entr'eux.

Recherche du centre.

§. III. Soit l'équation générale du second ordre :

$$\alpha y^2 + \beta xy + \gamma x^2 + \delta y + \varepsilon x + \zeta = 0,$$

et une transversale quelconque :

$$y = px + q.$$

on trouvera pour la somme des abscisses d'intersection de la droite avec la courbe :

$$\Sigma . x = - \frac{2\alpha pq + \beta q + \varepsilon}{\alpha p^2 + \beta p + \gamma}$$

de sorte que si on nomme X, Y les coordonnées du centre des moyennes distances des points d'intersection, on obtient :

$$X = - \frac{2\alpha pq + \beta q + \varepsilon}{2(\alpha p^2 + \beta p + \gamma)}, \quad Y = pX + q.$$

ainsi en éliminant le paramètre q, on trouve pour le diamètre correspondant :

$$(\beta p + 2\gamma) . X + (2\alpha p + \beta) Y + \varepsilon + \delta p = 0 \quad (1)$$

Si l'on veut maintenant le diamètre conjugué à une autre transversale

$$y = p'x + q'$$

on n'aura qu'à faire, sans répéter les calculs ;

$$(\beta p' + 2\gamma) X + (2\alpha p' + \beta) Y + \varepsilon + \delta . p' = 0.$$

Pour avoir le point d'intersection des diamètres, il faut combiner ensemble leurs équations, ce qui donnera les coordonnées X, Y de ce point :

$$X = \frac{\beta . \delta - 2\alpha\varepsilon}{4\alpha\gamma - \beta^2}, \quad Y = \frac{\beta . \varepsilon - 2\gamma . \delta}{4\alpha\gamma - \beta^2};$$

et comme ces coordonnées sont indépendantes de la quantité qui fixe la direction de la transversale, il s'ensuit qu'il ne saurait exister aucune courbe du second ordre, pourvue de plusieurs centres à la fois. On voit encore que tous les diamètres possibles deviennent parallèles entr'eux toutes les fois que les coëfficients de l'équation admettent la relation :

$$4\alpha\gamma - \beta^2 = 0.$$

D'ailleurs on ne saurait avoir à la fois $4\alpha\gamma - \beta^2 = 0$, $\beta\delta - 2\alpha\varepsilon = 0$, ni $4\alpha\gamma - \beta^2 = 0$, $\beta\varepsilon - 2\gamma\delta = 0$, puisque la courbe dégénère en un système de deux droites dans chacun de ces deux cas.

La méthode précédente pour déterminer le centre des courbes est générale, comme on le verra par l'exemple suivant des courbes du 3me ordre; mais observons avant tout que pour les courbes à centre unique, l'équation des diamètres doit être vraie quelle que soit la direction de la transversale : en effet en supposant, par exemple $p = 0$, dans l'équation (1), on aura :

$$2\gamma X + \beta Y + \varepsilon = 0.$$

C'est le diamètre conjugué à l'axe des abscisses ; en cherchant de même celui qui est conjugué à l'axe des ordonnées, et déterminant les coordonnées de son point d'intersection avec le premier, on retrouve les mêmes valeurs, déjà fournies par la méthode générale.

Suite de la recherche du centre.

§. 4. Pour faire voir que la méthode précédente est générale, appliquons-la à la courbe du 3me degré :

$$\alpha y^3 + \beta xy^2 + \gamma x^2 y + \delta x^3 + \varepsilon y^2 + \xi xy + \eta x^2 + dy + i.x + H = 0.$$

Et soit à cet effet

$$y = px + q.$$

l'équation d'une transversale quelconque :

Le diamètre engendré par cette droite sera représenté par l'équation :

$$3(\alpha p^3 + \beta p^2 + \gamma p + \delta)X + (3\alpha p^2 + 2\beta p + \gamma)(Y - pX)$$
$$+ \varepsilon p^2 + \xi p + \eta = 0.$$

Nommons λ, μ les coordonnées du centre unique de la courbe, pour les cas où il existe : il faudra donc avoir pour une valeur quelconque de p :

$$(3\beta\lambda + 3\alpha.\mu - 2\beta\lambda + \varepsilon)p^2 + (3\gamma\lambda + 2\beta\mu - \gamma.\lambda + \xi)p$$
$$+ 3\delta\lambda + \gamma.\mu + \eta = 0 ;$$

équation de condition qui se partage par conséquent en ces trois autres :

$$\beta\lambda + 3\alpha.\mu + \varepsilon = 0.$$
$$2\gamma\lambda + 2\beta\mu + \xi = 0.$$
$$3\delta\lambda + \gamma.\mu + \eta = 0.$$

De là on déduit par l'élimination de λ et μ :

$$6\beta.\varepsilon.\delta - 9\alpha\delta.\xi + \beta.\gamma.\xi - 2\gamma^2\varepsilon + 6\alpha\gamma.\eta - 2\beta^2\eta = 0. \quad (A)$$

C'est donc là l'équation de condition nécessaire entre les coëfficients

α, γ, β,... pour que la courbe soit pourvue d'un centre unique ; et elle a déjà été établie, d'après une marche différente et sous un point de vue différent, par Euler dans son introduction à l'analyse des infinis.

Quant aux coordonnées de ce centre unique, on peut les trouver sous deux formes différentes, selon qu'on les détermine par les équations posées ci-dessus, ou par l'intersection des deux diamètres respectivement conjugués aux axes coordonnés. En suivant cette dernière marche on obtient :

$$\lambda = \frac{\varepsilon\gamma - 3\alpha . \eta}{9\alpha . \delta - \beta\gamma}, \mu = \frac{\beta . \eta - 3\delta . \varepsilon}{9\alpha\delta - \beta\gamma}.$$

On voit que le centre unique passe à l'infini et que par suite tous les diamètres deviennent parallèles pour les courbes du 3me ordre qui satisfont à l'équation (A) et à la condition :

$$9\alpha\delta - \beta\gamma = 0 \; ; \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(B)}$$

que la courbe sera rapportée à son centre comme origine, toutes les fois qu'on aura : $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$.

Enfin que la courbe admet une infinité de centres toutes les fois que la condition (A) n'est pas satisfaite.

Suite de la recherche des Diamètres conjugués.

§. 5. Pour établir la méthode générale de la recherche et de l'existence des diamètres conjugués, nous traiterons l'exemple des courbes du second et du 3me degré : soit la courbe du second ordre

$$\alpha y^2 + \beta xy + \gamma x^2 + \delta y + \varepsilon x + \xi = 0.$$

Si l'on cherche le diamètre conjugué à l'axe des abscisses, on s'aperçoit qu'il devient parallèle à l'axe des y, pour le cas de $\beta = 0$. De même en cherchant le diamètre conjugué à l'axe des y, on trouve qu'il devient parallèle à l'axe des x par la même supposition de $\beta = 0$. Donc toutes les fois que la courbe est rapportée à un système de diamètres conjugués entr'eux, le terme en xy s'évanouit de son équation, qui devient par conséquent :

$$\alpha' u^2 + \gamma' t^2 + \delta' u + \varepsilon' t + \xi' = 0.$$

t, u dénotant les coordonnées d'un point quelconque de la courbe rapportée à un tel système d'axes, ou de droites parallèles à ces axes conjugués. — Ainsi pour déterminer un système de deux diamètres de cette nature, il suffit de passer des coordonnées primitives qu'on suppose rectangles, à un autre système de coordonnées obliques de même origine, former le coëfficient total du terme tu, et l'égaler à zéro : l'équation de condition qui en résulte déterminera tout ce qu'on pourra désirer sur cet objet.—Nommons B l'angle d'un

nouvel axe t avec celui des abscisses, A l'angle compris entre les deux nouveaux axes t, u : en faisant pour abréger $\cos B = m$, $\sin B = n$, $\cos(A+B) = p$, $\sin(A+B) = q$. on aura :

$$x = mt + pu.$$
$$y = nt + qu.$$

De là on déduit :

$$\alpha' = \alpha q^2 + \beta . p . q + \gamma . p^2$$
$$\beta' = 2\alpha . nq + \beta . np + \beta . mq + 2\gamma . mp$$
$$\gamma' = \gamma m^2 + \beta m . n + \alpha . n^2.$$

α' β' γ' dénotent les coëfficients de u^2, t, u, t^2, dans l'équation transformée, respectivement. — Pour que les axes t, u, forment un système de directions conjuguées, il faudra donc poser la condition :

$$2 . \alpha . n . q + \beta . n . p + \beta . m . q + 2 . \gamma . m . p = 0;$$

ou bien, en remettant pour m, n, p, q, leurs valeurs :

(C).... $$0 = 2\alpha . \sin B . \sin(A+B) + 2\gamma . \cos B \cos(A+B)$$
$$+ \beta \left\{ \sin B \cos(A+B) + \cos B \sin(A+B) \right\}.$$

Or en se donnant l'angle B à volonté, on déduit de cette équation la valeur correspondante de A, qui fournit la direction conjuguée à celle de l'angle B. Donc dans les courbes du second ordre, il existe une infinité de systèmes de directions et de diamètres conjugués.

Si on veut trouver un tel système à angle donné, on n'aura qu'à attribuer à A cette valeur, et résoudre l'équation par rapport à B. Si cet angle est par exemple $A = 45°$, on trouvera pour B

$$(\alpha - \gamma + \beta) \sin 2B + (\alpha - \gamma - \beta) \cos 2B + \alpha + \gamma = 0.$$

Si cet angle $A = 90° = \frac{\pi}{2}$, on trouve :

$$\text{tang } B = \left(\frac{\alpha - \gamma}{\beta}\right) \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha - \gamma}{\beta}\right)^2}$$

Cette double valeur prouve qu'en effet les deux diamètres conjugués sont à angles droits; et qu'il n'y a qu'un seul système de cette espèce. On a ainsi les directions des deux axes principaux d'une section conique, en fonction des coëfficients α, β, γ des termes de seconde dimension dans son équation.

Dans l'équation (C) continuons à considérer la quantité B comme arbitraire ou donnée, et la quantité $A + B = C$ comme inconnue. En divisant tous ses termes par $\cos B \cos C$, on en tire :

$$\text{tang } C = -\frac{2\gamma + \beta . \text{tang } B}{\beta + 2\alpha . \text{tang } B} \ldots \quad (C).$$

équation qui résout directement la question générale.

Si l'on voulait avoir le système des diamètres conjugués à longueurs égales, on n'aurait qu'à poser à la fois les deux conditions :

$$\alpha' = \gamma' \text{ et } \beta' = 0 \text{ , ou ces deux-ci :}$$

$$\gamma(m^2 - p^2) + \alpha(n^2 - q^2) + \beta(mn - pq) = 0,$$

$$2\gamma mp + 2\alpha nq + \beta(np + mq) = 0,$$

et déterminer les angles *A* et *B* en conséquence. Si la courbe était déjà rapportée à un 1er système de directions conjuguées, on ferait $\beta = 0$ dans ces équations, qui deviendraient ainsi :

$$\gamma(m^2 - p^2) + \alpha(n^2 - q^2) = 0, \; 2\alpha nq + 2\gamma mp = 0.$$

§. 6. Pour déterminer les diamètres conjugués dans les lignes du 3me ordre, on n'a qu'à suivre la marche tracée précédemment. En reprenant l'équation générale on a :

$$\alpha y^3 + \beta xy^2 + \gamma x^2y + \delta x^3 + \varepsilon y^2 + \xi xy + \eta x^2 + dy + ix + \mathrm{H} = 0.$$

Si l'on passe aux axes t, u et qu'on fasse :

$$\cos \mathrm{B} = m, \; \sin \mathrm{B} = n, \; \cos(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = p, \; \sin(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = q,$$

on trouvera :

$$\alpha' u^3 + \beta' tu^2 + \gamma' t^2u + \delta' t^3 + \varepsilon' u^2 + \xi' ut + \eta' t^2 u + \text{etc.} = 0,$$

$$\beta' = 3\alpha nq^2 + 3\delta . mp^2 + \beta mq^2 + 2\beta npq + 2\gamma mpq + \gamma np^2 ,$$

$$\gamma' = 3\alpha n^2q + 3\delta . m^2p + 2\beta . m . n . q + \beta n^2p + 2\gamma m . n . p + \gamma m^2q.$$

Or en cherchant tour-à-tour les diamètres conjugués aux axes t et u, on s'apercevra facilement que le 1er est parallèle à l'axe u quand $\beta' = 0$, et que le second est parallèle à l'axe t, si l'on a $\gamma' = 0$. Mais dès lors ils seront conjugués entr'eux. Donc pour découvrir un système de diamètres conjugués, dans le cas actuel, il faudra poser les deux conditons $\beta' = 0$, $\gamma' = 0$ et partant ;

$$3\alpha nq^2 + 3\delta . mp^2 + \beta mq^2 + 2\beta npq + 2\gamma mpq + \gamma . np^2 = 0,$$

$$3\alpha n^2q + 3\delta . m^2 . p + 2\beta . m . n . q + \beta n^2p + 2\gamma . m . n . p + \gamma m^2q = 0.$$

Toute courbe du 3me degré, pour laquelle ces conditions sont impossibles, n'admet point de directions conjuguées ; on voit que dans aucun cas, on ne saurait encore avoir une infinité de systèmes conjugués, puisqu'il n'y a que deux inconnues *A*, *B*, et qu'il y a deux équations de condition pour les déterminer.

Si l'on multiplie la 1re de ces équations par n, la seconde par q, et qu'on retranche l'une de l'autre, on obtient, par la suppression du facteur commun $np - mq$, la condition plus simple :

$$3\delta . m . p + \beta . n . q + \gamma(np + mq) = 0.$$

Si l'on multiplie la 1re par m, la seconde par p, et qu'on retranche l'une de l'autre, on obtient encore, par la suppression du facteur commun :

$$3.\alpha.n.q + \gamma.m.p + \beta(mq + np) = 0$$

Si donc on restitue les valeurs de m, n, p, q, les deux conditions finales deviendront :

$$3\delta \cos B \cos(A + B) + \beta \sin B \sin(A + B) + \gamma \sin(2B + A) = 0,$$
$$3.\alpha.\sin B.\sin(A + B) + \gamma \cos B \cos(A + B) + \beta.\sin(2B + A) = 0.$$

Si l'on veut avoir un système de diamètres conjugués rectangles, on doit faire $A = 90 = \frac{\pi}{2}$;

De là on déduit :

$$\text{tang}^2 B + \frac{3\delta - \beta}{\gamma}.\text{tang}\, B - 1 = 0,$$

$$\text{tang}^2 B - \frac{3\alpha - \gamma}{\beta}.\text{tang}\, B - 1 = 0.$$

ce qui donne la condition entre α, β, γ :

$$3(\beta\delta + \alpha\gamma) = \beta^2 + \gamma^2 ;$$

laquelle est nécessaire pour que les axes conjugués rectangles puissent exister ; et l'on obtient ensuite la direction de ces axes par l'équation

$$\text{tang}\, B = \frac{3\alpha - \gamma \pm \sqrt{(2\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2}}{2\beta}.$$

Si l'on a $\delta = \frac{1}{3}\beta$, $\alpha = \frac{1}{3}\gamma$, la 1re condition est évidemment satisfaite, et l'on obtient l'angle $B = \pm 1$.

Ainsi l'on voit qu'il y a des courbes du 3me degré qui admettent deux axes principaux.

Remarque I. L'application de la méthode précédente à des courbes particulières du 3me degré n'offrant pas de difficultés, nous ne nous arrêterons pas aux exemples. Mais nous rappelerons au lecteur qui serait curieux de connaître à fond la théorie des lignes du 3me ordre, qu'il peut consulter avec fruit le second tome de l'introduction à l'analyse des infinis où Euler classe ces lignes en 16 espèces différentes, selon la nature et la variété de leurs assymptotes.

On pourra appliquer à chaque espèce les considérations qu'on vient d'exposer, et en déduire quelques propriétés nouvelles, particulières à chacune.

Remarque II. Dans une courbe de dégré m, représentée par

$$\alpha y^m + \beta x y^{m-1} + \gamma y x^{m-1} + \text{etc...} = 0,$$

on peut encore démontrer que si le tout est rapporté à de nouveaux axes t, u, qui donnent la transformée

$$\alpha' u^m + \beta'.t.u^{m-1} + \gamma'.t^{m-1}.u + \text{etc.....} = 0,$$

les quatités β', γ' doivent s'évanouir, pour que les axes t, u puissent

être conjuguées entr'eux ; de sorte que c'est seulement dans les courbes du second ordre qu'il y a une infinité de systèmes conjugués.

Remarque III. La méthode pour déterminer la condition d'existence d'un centre unique, exposée dans le §. 4, est encore applicable à une courbe algébrique quelconque.

Remarque IV. Étant donnée l'équation d'un diamètre d'une courbe, on peut trouver la direction conjuguée, en procédant en sens inverse de la méthode du §. 4. On en déduit l'équation de condition qui détermine la constante, propre à fixer cette direction cherchée.

Remarque V. Il est évident par la définition générale que l'on a donnée du centre d'une courbe, que ce point, quand il existe, est le centre universel des moyennes distances de tous les points de la courbe : en effet de quelque manière qu'un diamètre soit dirigé, on peut toujours en tracer un autre parallèle à la direction conjuguée au premier. Le centre sera donc aussi celui des moyennes distances des points d'intersection de la courbe avec ce second diamètre.

Donc ce centre est celui des moyennes distances des points de rencontre d'un diamètre quelconque partant de tous les diamètres avec la courbe proposée. C. Q. F. D.—Cela posé comme l'équation (A) du §. 4 est toujours satisfaite dans le cas de $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$, $\xi = 0$, il s'ensuit que toutes les courbes du 3me degré, comprises dans l'équation

$$\alpha y^3 + \beta x y^2 + \gamma x^2 y + \delta x^3 + dy + ix + \text{H} = 0\,,$$

sont pourvues d'un centre placé à l'origine des coordonnées ; il en sera de même à plus forte raison des courbes de l'équation

$$\alpha y^3 + \beta x y^2 + \gamma x^2 y + \delta x^3 + \text{H} = 0.$$

On pourrait démontrer encore facilement que toute la classe de courbes, comprises dans l'équation particulière :

$$x^m + pyx^{m-1} + qy^2x^{m-2} + ry^3.x^{m-3} + \ldots.\ \pi.y^m + Q = 0,$$

sont pourvues d'un centre qui est l'origine des coordonnées. En général on peut démontrer que quand une courbe est pourvue de centre et qu'elle se trouve rapportée à des axes qui se coupent en ce point, son équation se trouve dépouillée de tous les termes en x^{m-1} ,et y^m , en yx^{m-2}, y^2x^{m-3}, y^3x^{m-4}.... ou de tous les termes de la forme $y^{\mu}.x^{m-\mu-1}$ la plus petite valeur de μ étant $=0$, et la plus grande étant donnée par l'équation $\mu = m - 1$.

Remarque VI. Quand une transversale se meut parallèlement à elle-même, le centre des moyennes distances de ses intersections réelles et imaginaires avec un nombre quelconque de courbes géométriques, situées dans un même plan, parcourt une ligne droite.

Remarque VII. Quand une transversale tourne autour d'un point fixe, le lieu des centres des moyennes de ses intersections avec une section conique est une autre section conique, l'équation de la 1re courbe étant de la forme :

$$Ax^2 + By^2 + C = 0$$

celle de la seconde dans laquelle (a, b) désigne le point fixe, sera :

$$Ax^2 + By^2 + aAx + bBy = 0.$$

Dans le cas de la parabole on trouvera une courbe du 3me degré qui se réduit à un diamètre de la courbe lorsque le point fixe est placé au sommet de la courbe ; de là on peut déduire un moyen de construction de la courbe.

Remarque VIII. Quand une transversale pivote autour d'un point fixe donné, les centres des moyennes distances de ses intersections avec n droites données sont sur une courbe du degré n : en désignant par $y - Mx - N = 0$, $y - M'x - N' = 0$ les équations de deux droites données, on aura pour la courbe l'équation :

$$2X = \frac{NX}{Y - MX} + \frac{N'X}{Y - M'X}; \text{partant}$$

$$2(Y - MX)(Y - M'X) - N(Y - M'X) - N'(Y - MX) = 0.$$

Ce qui forme alors une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux deux droites données et qui passent par le milieu de la droite qui joint le point fixe donné au point de rencontre des deux droites proposées. De là on déduitun nouveau moyen de construction de l'hyperbole; cette courbe étant donnée, on peut aussi déterminer les deux droites correspondantes.

Si les droites données sont au nombre de trois, la courbe cherchée aura pour équation :

$$3(Y - MX)(Y - M'X)(Y - M''X) - N(Y - M'X)(Y - M''X)$$
$$0 = -N'(Y - MX)(Y - M''X) - N''(Y - MX)(Y - M'X);$$

et elle aura trois asymptotes rectilignes parallèles aux trois droites données, et passant en un même point, situé au tiers de la droite qui joint le point fixe au point d'intersection des trois droites proposées. En effet le facteur $Y - MX$, donnera par l'équation trouvée :

$$Y - MX = \frac{N}{3} + \frac{N'}{3}\left(\frac{Y - MX}{Y - M'X}\right) + \frac{N''}{3}\left(\frac{Y - M'X}{Y - M''X}\right).$$

et l'équation de l'asymptote sera par conséquent

$$y = MX + \frac{N}{3}.$$

Remarque IX. Il peut se faire que l'équation (A) du §. 4 soit satisfaite, sans que la courbe proposée soit pourvue d'un centre proprement dit; mais il faut qu'alors les coordonnées λ, μ, prennent en même temps des valeurs indéterminées. Soit par exemple la courbe du 3me degré :

$$\epsilon y^2 + \delta x^3 + ix + \text{H} = 0.$$

Dès lors on aura $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\delta = 0$ dans l'équation générale; l'équation (A) sera évidemment satisfaite; mais on trouve en même temps $\lambda = \frac{0}{0}$, $\mu = \frac{0}{0}$. Or en opérant directement sur l'équation particulière posée ci-dessus, on trouve que toute transversale parallèle à l'axe des abscisses, engendre un diamètre qui coïncide avec l'axe des ordonnées, et que la transversale parallèle à ce dernier axe produit un diamètre qui coïncide avec le premier axe (celui des x); l'origine des coordonnées est donc le point d'intersection de ces deux diamètres conjugués rectangles. Mais toute autre transversale, ayant une direction intermédiaire, engendre constamment un diamètre parallèle à l'axe des ordonnées; de sorte que la courbe est dépourvue de centre proprement dit, ou si l'on veut, elle a un centre particulier, placé à l'origine des coordonnées, et son autre centre sera partout à l'infini. Mais il est évident que dans des cas semblables le procédé du §. 4, qui suppose le point d'intersection de deux diamètres quelconques, placé à une distance finie, n'est plus applicable.

Remarque X. Les considérations générales exposées précédemment sont encore applicables aux courbes à double courbure : soient à cet effet,

$$x^m + (p + qz)\, x^{m-1} + \text{etc.}\ldots + l = 0,$$
$$y^m + (\text{P} + \text{Q}z)\, y^{m-1} + \text{etc.}\ldots + \text{L} = 0,$$

les équations des projections de la courbe sur les plans des (x, z) et (y, z). Concevons un plan transversal que nous pouvons diriger parallèlement au plan des xy, dont la direction est elle-même arbitraire. L'équation de ce plan sera donc :

$$\text{Z} = \text{constante} = \delta\,;$$

et le centre des M, D. (X, Y, Z) de ses points d'intersection avec la courbe, se trouvera lui-même sur ce plan, et l'on aura :

$$\text{X} = \frac{\Sigma . x}{m},\ \text{Y} = \frac{\Sigma y}{m},\ \text{Z} = \frac{\Sigma z}{m} = \delta.$$

Or d'après les équations de la courbe, on doit avoir :

$$\Sigma x = -(p + qz) = -(p + q\delta)$$
$$\Sigma y = -(\text{P} + \text{QZ}) = -(\text{P} + \text{Q}\delta).$$

Partant : $\Sigma x = -(p + q\delta)$, $\Sigma y = -(\text{P} + \text{Q} . \delta)$, et $\text{Z} = \delta$.

Si le plan transversal vient à se mouvoir parallèlement à lui-même, la quantité δ variera; donc en éliminant ce paramètre variable des trois équations précédentes, comparées deux à deux, on aura la loi analytique des diverses positions du centre, correspondantes aux différentes situations du plan; or cette opération donne :

$$m.X + p + qZ = 0, \; mY + P + QZ = 0 ;$$

équations qui par leur existence simultanée représentent une ligne droite. Ainsi quand un plan se meut parallèlement à lui-même, le centre des moyennes distances de ses intersections avec une courbe à double courbure parcourt une ligne droite, qu'on peut nommer *diamètre* de la courbe proposée.

Définition des Diamètres dans les courbes en général.

Pour s'assurer si une courbe à double courbure est pourvue d'un centre, il faut chercher si les projections de la courbe sur deux plans coordonnés jouissent de la même propriété ; ce qui mène à deux équations de condition analogues à l'équation (A) du §. 4.

Pour déterminer les coordonnées du centre dans une courbe, il suffit de chercher les équations de deux diamètres, conjugués à deux plans transversaux donnés.

Si l'on fait tourner un plan autour d'une droite fixe, le centre des moyennes distances de ses intersections avec une courbe quelconque de degré m, parcourt une autre courbe de même degré :

Si les équations de la courbe proposée sont, par exemple,

$$\alpha x^3 + \beta x^2 . z + \gamma z^2 x + \delta . z^3 + \varepsilon x^2 + \xi . xz + \eta z^2 + d'x + iz + \mathrm{H} = 0.$$
$$\alpha' . y^3 + \beta' y^2 z + \gamma' z^2 y + \delta' z^3 + \varepsilon' y^2 + \xi yz + \ldots\ldots\ldots + \mathrm{H}' = 0$$

La courbe du centre sera représentée de la manière suivante :

$$3\alpha X^3 + 3\beta X^2 . Z + 3\gamma X . Z^2 + 3\delta . Z^3 + \varepsilon X^2 + \xi XZ + \eta . Z^2 = 0,$$
$$3\alpha' Y^3 + 3\beta' Y^2 Z + 3\gamma' X . Z^2 + 3\delta' . Z^3 + \varepsilon' Y^2 + \xi' XY + \eta' . Z^2 = 0.$$

Remarque XI. Comme le théorème analytique, énoncé à la fin de la remarque V nous semble devoir offrir quelques ressources, dans la discussion de certaines courbes, nous allons le démontrer : à cet effet nous nous proposons la question suivante : étant donnée une courbe à centre, rapportée à un système de coordonnées qui se coupent en ce point, on demande le lieu géométrique, décrit par le centre des M. D. des points d'intersection de la courbe avec une transversale mobile, qui pivote autour du centre de la courbe.

Soit l'équation de la courbe donnée :

$$0 = \begin{cases} \alpha^m + q . \beta . \alpha^{m-1} + (r_{,} + s_{,}\beta + t_{,} . \beta^2)\alpha^{m-2} + \\ (r_{,,} + s_{,,}\beta + t_{,,}\beta^2 + u_{,,}\beta^3)\alpha^{m-3} + (r_{,,,} + s_{,,,}\beta + t_{,,,}\beta^2 + u_{,,,}\beta^3 + v_{,,,}\beta^4)\alpha^{m-4} \\ + \ldots\ldots + g + h\beta + i . \beta^2 + k . \beta^3 + l\beta^4 + \ldots \lambda\beta^m. \end{cases}$$

Or il suit évidemment de la propriété du centre de la courbe, que le lieu cherché doit se réduire à un point unique, qui est ici l'origine des coordonnées.

Ainsi quand nous serons parvenu à la solution analytique de la question proposée, nous devrons établir dans le résultat trouvé les conditions nécessaires pour que le lieu cherché se réduise à l'origine des coordonnées. Cela posé, nommons :

$$\beta = \varepsilon . \alpha$$

l'équation de la droite tournante, et (X, Y) les coordonnées courantes de la courbe inconnue, ou du moins supposée telle : il viendra pour une position quelconque de la droite proposée :

$$X = \frac{1}{m} \Sigma . \alpha, \; Y = \frac{1}{m} . \Sigma . \beta = \frac{1}{m} . \varepsilon . \Sigma \alpha.$$

De plus en substituant dans l'équation de la courbe donnée la valeur de β savoir $\varepsilon . \alpha$, on obtient :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^m + q . \varepsilon . \alpha^m + (r_{,} + s_{,} . \varepsilon\alpha + t_{,} . \varepsilon^2\alpha^2)\, \alpha^{m-2} \\ + (r_{,,} + s_{,,} \varepsilon\alpha + t_{,,,} \varepsilon^2\alpha^2 + u_{,,,} \varepsilon^3\alpha^3)\alpha^{m-3} \\ + (r_{,,,} + s_{,,,} \varepsilon\alpha + t_{,,,} \varepsilon^2\alpha^2 + u_{,,,} \varepsilon^3\alpha^3 + v_{,,,} \varepsilon^4\alpha^4)\alpha^{m-4} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \ldots\ldots \; + g + h . \varepsilon\alpha + i . \varepsilon^2\alpha^2 + \ldots\ldots \lambda . \varepsilon^m . \alpha^m \end{array}\right\} = 0;$$

ou bien, en réunissant les termes en $\alpha^m, \alpha^{m-1} \ldots\ldots$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^m(1 + q . \varepsilon + t_{,} \varepsilon^2 + u_{,,} \varepsilon^3 + v_{,,,} \varepsilon^4 + \ldots\ldots + \lambda . \varepsilon^m) \\ + \alpha^{m-1}(s_{,} \varepsilon + t_{,,} \varepsilon^2 + u_{,,,} \varepsilon^3 + v_{,,,,} . \varepsilon^4 + \ldots\ldots) + \ldots\ldots + g \end{array}\right\} = 0.$$

La forme de cette équation montre que la somme des abscisses d'intersection de la droite avec la coube est égale au coëfficient de α^{m-1} divisé par celui de α^m; et comme cette somme doit constamment être égale à zéro, à cause de X = 0, Y = 0, il en doit être ainsi du coëfficient de α^{m-1} ; ainsi nous aurons pour une valeur arbitraire de ε :

$$s_{,} \varepsilon + t_{,,} \varepsilon^2 + u_{,,,} \varepsilon^3 + v_{,,,,} . \varepsilon^4 + \text{etc}\ldots = 0;$$

$$\text{Partant : } s_{,} = 0, t_{,,} = 0, u_{,,,} = 0, V_{,,,,} = 0, \text{ etc}\ldots$$

Ce résultat fait voir que quand une courbe, pourvue d'un centre unique, est rapportée à des axes coordonnés qui se coupent en ce point, elle est exprimée par une équation qui se trouve dépouillée de tous les termes de la forme

$$\beta^{\mu} \alpha^{m-(\mu+1)} \left[\begin{array}{c} \mu = 0 \\ \mu = m-1 \end{array} \right] \text{C.Q.F.P.}$$

XV. *Sur la résolution des équations numériques*,

Par J. MARTYNOWSKI,

Répétiteur de mathématiques à l'École des Arts-et-Manufactures et des Mines de l'Université de Liége.

Je me propose de donner, dans ce mémoire, quelques théorèmes et développements qui se rapportent à la résolution des équations numériques.

On y trouvera, entre autres choses, l'algorithme de Budan étendu jusqu'à la série de Taylor; une nouvelle démonstration élémentaire du terme complémentaire de cette série; le développement de la puissance quelconque et du logarithme d'un polynome; un essai sur la partition des nombres et les nombres partitifs; l'équation aux puissances et aux combinaisons des racines de la proposée, etc.

Quant à ce qui concerne l'objet principal du mémoire, il consiste à n'employer que les dérivées successives dans la recherche des lieux des racines réelles d'une équation. A cet effet je donne, sur les variations de signes dans les dérivées d'une équation, un théorème très-remarquable, à l'aide duquel on peut s'assurer du nombre possible des racines réelles, comprises dans l'étendue de $-\infty$ à a; quoique, à l'instar de la règle des signes de Descartes, ce théorème ne précise pas, si les racines en question existent ou non. Pour le calcul approximatif d'une racine, j'emploie de préférence la méthode de Newton, après avoir démontré : 1° qu'on peut toujours la rendre applicable à ce calcul et 2° constater les limites de la convergence que fournit cette méthode.

On trouvera aussi, dans ce mémoire, une nouvelle méthode pour le calcul des racines imaginaires. Voici l'exposé de cette méthode.

On sait que la construction d'une racine imaginaire dépend de ces deux choses : 1° du module et 2° de la partie trigonométrique imaginaire : cette dernière étant la racine algébrique de $+1$ ou -1, ou bien l'exponentielle à base népérienne et à exposant imaginaire. Je résous la question des modules, en donnant l'équation aux com-

binaisons deux à deux des racines de la proposée. Cette équation aux combinaisons deux à deux est du degré marqué par le nombre des combinaisons deux à deux des racines de la proposée ; elle comporte autant de racines réelles qu'il y a des combinaisons deux à deux à établir entre les racines réelles de la proposée, plus, celles qui viennent de la combinaison des racines imaginaires conjuguées entre elles-mêmes. Connaissant les racines réelles de la proposée, il sera aisé d'en faire les combinaisons deux à deux et de distinguer parmi les racines réelles de l'équation aux combinaisons deux à deux, celles qui donnent les modules ou plutôt les carrés des modules. Pour trouver la partie trigonométrique de la racine imaginaire, je procède de la manière suivante. En représentant le module par r et la partie trigonométrique par t, on sait que s'il y a une racine imaginaire de la forme rt, il y a aussi une autre de la forme rt^{-1}. Cela posé, je mets successivement rt et rt^{-1}, à la place de l'inconnue de la proposée, et j'ai ainsi deux équations dont le produit est une équation réciproque en t, réductible au même degré que la proposée, par la transformation $t + t^{-1} = u$. Cette dernière équation, fonction implicite de r et de u donne, il est vrai, autant d'équations distinctes qu'il y a de modules trouvés précédemment. Mais les racines de u, nécessaires à la construction des racines imaginaires de la proposée, sont toujours comprises entre o et $2r$; tandis que toutes celles d'entre u, qui sont étrangères à cette construction, dépassent déjà ces limites; par conséquent, il sera aisé de trouver toutes les valeurs de u, correspondantes à celles de r et construire ainsi la racine imaginaire cherchée.

§ I. *Algorithme de Budan.*

2. On sait que toute *fonction entière et rationnelle* d'une seule variable x, que je représenterai par φx, après avoir été ordonnée suivant les puissances ascendantes ou descendantes de la variable, peut se mettre sous la forme :

$$\varphi x = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m,$$

ou bien sous celle-ci :

$$\varphi x = a_m + a_{m-1} x + \ldots + a_1 x^{m-1} + a_0 x^m;$$

les coëfficients a_0, a_1, a_2, ... étant constants.

3. On démontre aisément que la fonction φx, définie dans le n° précédent, est *continue*, c'est-à-dire présente une suite continue

de valeurs, correspondantes à toutes les valeurs de x, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Remarque. En prenant x pour abscisse et φx pour ordonnée d'un système de points, rapporté à des axes rectangulaires; l'équation $\varphi x = a_0 x^m + a_1 x^{m1} + a_2 x^{m-2} + \ldots$ ne pourra donner qu'une ligne courbe continue, composée d'une seule branche indéfinie, depuis $x = -\infty$ jusqu'à $+\infty$.

4. Lorsque la fonction φx prend une valeur particulière ou qu'elle est constamment nulle, tandis que x reçoit des valeurs correspondantes, on a

$$\varphi x = 0 = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots$$

équation qui est algébrique ou numérique selon que les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sont littéraux ou numériques. D'ailleurs le nombre m est ce qu'on nomme le degré de l'équation. Tout nombre a qui, substitué à la place de x, rend le polynome φx nul, est appelé racine ou soluteur de l'équation $\varphi x = o$.

Prenons au hasard un nombre a et divisons le polynome φx par $x - a$.

Le quotient de la division par $x - a$ étant un polynome du degré $m - 1$ en x; représentons-le par

$$\varphi x = a'_0 x^{m-1} + a'_1 x^{m-2} + \ldots + a'_{m-2} x + a'_{m-1}.$$

Soit encore r le reste de cette division. Comme le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient plus le reste; on aura

$$\varphi x = (x - a) . \varphi_1 x + r; \qquad (1)$$

ou bien

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m =$$

$$(x - a)(a'_0 x^{m-1} + a_1' x^{m-2} + \ldots + a'_{m-2} x + a'_{m-1}) + r,$$

Effectuons la multiplication indiquée et mettons en regard les termes, affectés de mêmes puissances de x, dans les deux membres de cette identité; nous aurons

$$a_0 x^m + \quad a_1 x^{m-1} \quad + \quad a_2 x^{m-2} \quad + \ldots + \quad a_{m-1} x \quad + a_m =$$

$$a_0 x^m + \left.\begin{matrix} a'_1 \\ - a'_0 a \end{matrix}\right\} x^{m-1} + \left.\begin{matrix} a'_2 \\ - a'_1 a \end{matrix}\right\} x^{m-2} + \ldots + \left.\begin{matrix} a'_{m-1} \\ - a'_{m-2} a \end{matrix}\right\} x + \begin{matrix} r \\ - a'_{m-1} a. \end{matrix}$$

Les coefficients de mêmes puissances de x. dans cette identité, devant être égaux; on en déduit les $m + 1$ équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= a'_0, \\ a_1 &= a_1' - a'_0 a, \\ a_2 &= a'_2 - a_1' a, \\ &\dots \\ a_{m-1} &= a'_{m-1} - \\ a_m &= r + a'_{m-1} a. \end{aligned}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{aligned} a'_0 &= a_0, \\ a_1' &= a_1 + a'_0 a, \\ a_2' &= a_2 + a_1' a, \\ &\dots \\ a'_{m-1} &= a_{m-1} + a'_{m-2}\, a, \\ r &= a_m + a'_{m-1} a. \end{aligned}\right.$$

L'expression générale, telle que $a'_n = a_n + a'_{n-1} a$ démontre que *le coëfficient du terme d'un rang quelconque, dans le quotient, est égal au coëfficient de même rang dans le dividende, augmenté du produit du coëfficient qui précède, dans le quotient, par a.*

En prenant d'abord une, puis deux, trois,... équations précédentes, on parviendra, par des substitutions successives, aux résultats suivants :

$$\left.\begin{aligned} a_0' &= a_0, \\ a_1' &= a_0 a + a_1, \\ a_2' &= a_0 a^2 + a_1 a + a_2, \\ a_3' &= a_0 a^3 + a_1 a^2 + a_2 a + a_3, \\ &\dots\dots \\ a_n' &= a_0 a^n + a_1 a^{n-1} + \dots + a_{n-1} a + a_n, \\ &\dots\dots \\ r &= a_0 a^m + a_1 a^{m-1} + \dots + a_{m-1} a + a_m \end{aligned}\right\}\ (2)$$

D'où l'on tire cette règle : *les coëfficients successifs du quotient de la division de φx par $x - a$ s'obtiennent en arrêtant le polynome proposé à un, deux, trois,... termes, et en faisant, dans les polynomes partiels ainsi obtenus, $x = a$, et m successivement égal à* 0, 1, 2, 3,...

Cette règle générale ne se trouve pas ainsi énoncée dans les traités élémentaires d'algèbre. On y lit au lieu de : *en faisant dans les polynomes partiels*, etc., l'énoncé que voici : *en supprimant les puissances communes de a* : c'est ce qui n'est exact que lorsque les coefficients a_0, a_1, a_2,... sont indépendants de m.

La règle précédente fait voir que le reste de la division de φx par $x - a$ n'est autre chose que le polynome φx, dans lequel on a remplacé x par a. D'après cela, l'équation (1) ci-dessus peut être modifiée et écrite comme il suit :

$$\varphi x = (x - a).\, \varphi_1 x + \varphi a \dots. \qquad (3)$$

Si a est la racine de l'équation $\varphi x = 0$, on a $\varphi a = 0$. Donc, si a est la racine de l'équation $\varphi x = 0$, le polynome φx est divisible par

$x - a$; réciproquement, si un polynome ϕx est divisible par $x - a$, a est une racine de l'équation $\phi x = o$.

5. Reprenons l'équation

$$\varphi x = (x - a) . \varphi_1 x + \varphi a$$

et supposons qu'on divise $\varphi_1 x$ par $x - a$; le quotient en étant $\varphi_2 x$ et $\phi_1 a$ le reste, on aura

$$\varphi_1 x = (x - a) . \varphi_2 x + \varphi_1 a.$$

De même, divisons $\varphi_2 x$ par $x - a$ puis supposons que $\varphi_3 x$, soit le quotient et $\varphi_2 a$ le reste; nous aurons

$$\varphi_2 x = (x - a) . \varphi x + \varphi_2 a;$$

et ainsi de suite. En prenant une, puis deux, trois,... des équations précédentes; on parviendra, par des substitutions successives, aux résultats suivants :

$$\varphi x = \varphi a + \varphi_1 a . (x - a),$$
$$\varphi x = \varphi a + \varphi_1 a . (x - a) + \varphi_2 a . (x - a)^2,$$
$$\varphi x = \varphi a + \varphi_1 a . (x - a) + \varphi_2 a . (x - a)^2 + \varphi_3 a . (x - a)^3,$$
etc. etc.

généralement,

$$\varphi x = \varphi a + \varphi_1 a . (x - a) + \varphi_2 a . (x - a)^2 + \ldots + \ldots \varphi_n a . (x - a)^n \ldots . (1).$$

Posons $x - a = h$, d'où $x = a + h$; la dernière égalité prendra la forme suivante :

$$\varphi (a + h) = \varphi a + \varphi_1 a . h + \varphi_2 a . h^2 + \ldots\ldots + \varphi_n a . h^n + \ldots . (2).$$

Les formules (1) et (2) sont connues sous le nom d'*algorithme de Budan*. La formule (2) fait voir que *toute fonction algébrique ou numérique, entière et rationnelle, peut se développer suivant les puissances entières de l'accroissement de la variable de cette fonction.*

Voyons maintenant quelle est la nature des fonctions φa, $\varphi_1 a$, $\varphi_2 a$,... $\varphi_n a$, qui entrent comme coëfficients des puissances 0, 1, 2, 3,... n de l'accroissement h, suivant lequel le développement (2) est ordonné.

On sait d'abord que φa n'est autre chose que le polynome φx, dans lequel on fait $x = a$. En divisant φx par $x - a$ et désignant le quotient par $\phi_1 x$; le reste de la division de φx par $x - a$ sera $\varphi_1 a$. De même, en divisant $\varphi_1 x$ par $x - a$ et en représentant le quotient par

$\varphi_1 x$, le reste sera $\varphi_1 a$; et ainsi des autres fonctions $\varphi_2 x$, $\varphi_3 x$, $\varphi_4 x$,...

Or, d'après le n° 4, la fonction $\varphi_1 x$ étant d'abord mise sous la forme

$$\varphi_1 x = a_0' x^{m-1} + a_1' x^{m-2} + \ldots + a'_{m-2} x + a'_{m-1};$$

on aura, en y substituant pour a_0', a_1', a_2', ... leurs valeurs, données sous la marque (2) du n° 4,

$$\begin{aligned}\varphi_1 x = a_0 x^{m-1} &+ \\ (a_0 a + a_1)\, x^{m-2} &+ \\ (a_0 a^2 + a_1 a + a_2)\, x^{m-3} &+ \\ \ldots\ldots\ldots & \\ a_0 a^{m-1} + a_1 a^{m-2} + a_2 a^{m-3} &+ \ldots + a_{m-1}\end{aligned}$$

Or, $\varphi_1 a$ est ce que devient $\varphi_1 x$ lorsqu'on y fait $x = a$: donc,

$$\begin{aligned}\varphi_1 a = a_0 a^{m-1} &+ \\ a_0 a^{m-1} + a_1 a^{m-2} &+ \\ a_0 a^{m-1} + a_1 a^{m-2} + a_2 a^{m-3} &+ . \\ \ldots\ldots\ldots & \\ a_0 a^{m-1} + a_1 a^{m-2} + a_2 a^{m-3} &+ \ldots + a_{m-1}.\end{aligned}$$

Cette expression de $\varphi_1 a$ se compose de m lignes, dont chacune a un terme de plus que la précédente ; par suite de quoi, les termes $a_0 a^{m-1}$, $a_1 a^{m-2}$, $a_2 a^{m-3}$,... s'y trouvent répétés successivement m, $m-1$, $m-2$,... fois. Donc, en ajoutant, il viendra

$$\varphi_1 a = m a_0 a^{m-1} + (m-1)\, a_1 a^{m-2} + \ldots + 2\, a_{m-2}\, a + a_{m-1}.$$

En comparant ce résultat avec

$$\varphi a = a_0 a^m + a_1 a^{m-1} + \ldots . + a_{m-1}\, a + a_m;$$

on voit que chaque terme de $\varphi_1 a$ se tire de celui qui a même rang dans φa, en multipliant par l'exposant et diminuant l'exposant d'une unité : le terme constant a_m, qui est censé être affecté de a^0, disparaît dans cette opération. L'opération qu'il faut faire subir à φa, pour en déduire $\varphi_1 a$, s'appelle *dérivation :* et $\varphi_1 a$ *dérivée de* φa.

Cherchons maintenant le quotient de la division de $\varphi_1 x$ par $x - a$. D'abord

$$\varphi_1 x = m a_0 x^{m-1} + (m-1)\, a_1 x^{m-2} + \ldots + 2 a_{m-2}\, x + a_{m-1}$$

Le quotient devant être un polynome du degré $m-2$ en x, représentons-le par

$$\varphi_2 x = a_0'' x^{m-2} + a_1'' x^{m-3} + \ldots . + a''_{m-2}.$$

Les coefficients a_0'', a_1'', a_2'',... n'étant autre chose que les polynomes, formés de un, deux, trois,... premiers termes, dans lesquels, après avoir remplacé x par a, on fait successivement $m-1=o$, $m-1=1$, $m-1=2$,... ; on a par conséquent

$$\begin{aligned}\varphi_2 x = & 1 \,.\, a_0 \,.\, x^{m-2} + \\ & (2a_0 a + 1 \,.\, a_1)\, x^{m-3} + \\ & (3a_0 a^2 + 2a_1 a + a_2)\, x^{m-4} + \\ & \cdots\cdots \\ & (m-1)\, a_0 a^{m-2} + (m-2)\, a_1 a^{m-3} + \ldots + a_{m-2}.\end{aligned}$$

Donc, en posant $x=a$, on aura

$$\begin{aligned}\varphi_2 a = & 1 \,.\, a_0 a^{m-2} + \\ & 2 \,.\, a_0 a^{m-2} + 1 \,.\, a_1 a^{m-3} + \\ & 3 \,.\, a_0 a^{m-2} + 2 \,.\, a_1 a^{m-3} + a_2 a^{m-4} + \\ & \cdots\cdots \\ & (m-1)\, a_0 a^{m-2} + (m-2)\, a_1 a^{m-3} + \ldots + a_{m-2}.\end{aligned}$$

Or, à cause de

$$1+2+3+\ldots.(m-1) = m \,.\, \frac{m-1}{2},$$

$$1+2+3+\ldots.(m-2) = \frac{m-1}{1} \,.\, \frac{m-2}{2},$$

$$1+2+3+\ldots.(m-3) = \frac{m-2}{1} \,.\, \frac{m-3}{2},$$

etc. etc.

l'expression précédente de $\varphi_2 a$ revient à

$$\varphi_2 a = \frac{1}{1\,.\,2} \left\{ m\,(m-1)\,.\, a_0 a^{m-2} + (m-1)\,(m-2).\, a_1 a^{m-3} + \ldots + \ldots + 2a_{m-2} \right\}$$

On voit que $\varphi_2 a$ n'est autre chose que la dérivée de $\varphi_1 a$, divisée par 2.

On démontrera de la même manière que $\varphi_3 a$ n'est autre chose que la dérivée de $\varphi_2 a$ divisée par 3 ; et ainsi des autres.

Désignons par $\varphi' a$ la dérivée de φa, par $\varphi'' a$ la dérivée de $\varphi' a$, par $\varphi''' a$ la dérivée de $\varphi'' a$,... ; et convenons d'appeller *dérivée première*, *seconde*, *troisième*,... de φa les expressions $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi''' a$,... nous aurons

$$\varphi a = a_0 a^m + a_1 a^{m-1} + a_2 a^{m-2} + \ldots$$
$$\varphi' a = m a_0 a^{m-1} + (m-1)\, a_1 a^{m-2} + (m-2)\, a_2 a^{m-3} + \ldots$$
$$\varphi'' a = m(m-1)\, a_0 a^{m-2} + (m-1)(m-2)\, a_1 a^{m-3} + \ldots$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

D'après ce qui vient d'être dit sur la formation de $\varphi_1 a$, $\varphi_2 a$, $\varphi_3 a, \ldots$ on aura

$$\varphi_1 a = \frac{1}{1} \cdot \varphi' a,$$
$$\varphi_2 a = \frac{1}{1.2} \cdot \varphi'' a,$$
$$\varphi_3 a = \frac{1}{1.2.3} \cdot \varphi''' a,$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$
$$\varphi_n a = \frac{1}{1.2\ldots\ldots n} \cdot \varphi^{(n)} a.$$

Au moyen de ces expressions, on mettra la formule ci-dessus (2) sous la forme

$$\varphi(a+h) = \varphi a + h \cdot \varphi' a + \frac{h^2}{1.2} \cdot \varphi'' a + \ldots\ldots + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} \cdot \varphi^{(n)} a + \ldots \quad (3)$$

L'algorithme de Budan, mis sous cette dernière forme, est ce qu'on nomme la *série de Taylor*. Elle n'est ici démontrée que pour le cas où la fonction est entière et rationnelle.

6. En considérant une fonction $u = \varphi x$ pour une valeur particulière de x, on a ce qu'on nomme *état primitif de la fonction*, et la fonction elle-même est ce qu'on nomme *fonction primitive*. Or, si x reçoit un accroissement quelconque h, la fonction varie et devient $u' = \varphi(x+h)$.

Cela posé, démontrons que, quelle que soit la nature de la fonction φx, la série de Taylor y est applicable, c'est-à-dire, que la fonction φx peut toujours se développer suivant les puissances ascendantes et entières de l'accroissement h.

En effet, prenons h pour la mesure de la fonction $\varphi\,(x+h)$, c'est-à-dire divisons $\varphi\,(x+h)$ par h ; le quotient de cette division étant une fonction quelconque de x et de h, que nous désignerons par $\varphi\,(x, h)$ et r le reste, on aura

$$\varphi\,(x+h) = r + h \cdot \varphi_1(x,h).$$

Or, si l'on fait $h = o$, on trouve $\varphi x = r$: donc

$$\varphi(x+h) = \varphi x + h . \varphi_1(x,h) \ldots \quad (1)$$

De même, si on divise $\varphi_1(x, h)$ par h : le quotient en étant $\varphi_2(x,h)$ et $\varphi_1 x$ le reste ; on aura

$$\varphi_1(x,h) = \varphi_1 x + h . \varphi_2(x,h) \ldots \quad (2)$$

En divisant de nouveau $\varphi_2(x,h)$ par h, et représentant le quotient par $\varphi_3(x, h)$: le reste de cette division étant $\varphi_2 x$, on aura

$$\varphi_2(x,h) = \varphi_2 x + h . \varphi_3(x,h) \ldots \quad (3)$$

En continuant de la sorte et remettant, les unes dans les autres, les équations (1), (2), (3)... on trouvera

$$\varphi(x+h) = \varphi x + \varphi_1 x . h + \varphi_2 x . h^2 + \varphi_3 x . h^3 + \ldots \quad (A)$$

On démontre ainsi que *toute fonction d'une seule variable est développable suivant les puissances ascendantes de l'accroissement.* La formule ci-dessus (A) n'est autre chose que l'algorithme de Budan, étendu à des fonctions quelconques.

Pour trouver la nature des fonctions particulières φx, $\varphi_1 x$, φx,..... observons que le développement (A) est une fonction entière et rationnelle de h, et par conséquent la règle de la dérivation, que nous avons donnée n° 5, y est applicable. Comme φx, $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$,... sont des quantités constantes, dans le cours de la dérivation, nous aurons, en employant les notations conventionnelles pour désigner les dérivées successives de $\varphi(a+h)$;

$$\varphi'(x+h) = 1 . \varphi_1 x + 2 . \varphi_2 x . h + 3 . \varphi_3 x . h^2 + \ldots$$
$$\varphi''(x+h) = 1 . 2 . \varphi_2 x + 2 . 3 . \varphi_3 x . h + 3 . 4 . \varphi_4 x . h^2 + \ldots$$
$$\varphi'''(x+h) = 1 . 2 . 3 . \varphi_3 x + 2 . 3 . 4 . \varphi_4 x . h + 3 . 4 . 5 . \varphi_5 x . h^2 + \ldots$$
etc. etc.

En fesant, dans tous ces développements, $h = o$; on trouve

$$\varphi_1 x = \frac{1}{1} . \varphi' x,$$

$$\varphi_2 x = \frac{1}{1 . 2} . \varphi'' x,$$

$$\varphi_3 x = \frac{1}{1 . 2 . 3} . \varphi''' x,$$

$$\varphi_4 x = \frac{1}{1 . 2 . 3 . 4} . \varphi^{\text{iv}} x, \text{ etc.}$$

Substituant ces expressions, dans la formule, ci-dessus (A) on retrouve la série de Taylor, donnée sous la marque (3) du n° 5.

Remarque. L'idée de mesurer une fonction au moyen de sa variable, ou au moyen de toute autre fonction prise pour mesure, est de M. Wronski, qui s'en est servi le premier dans la déduction de sa *loi suprême*, nom donné par l'auteur au théorème général, comprenant tous les développements connus.

7. Reprenons la série de Taylor :

$$\varphi(x+h)=\varphi x+h\,.\,\varphi' x+\frac{h^2}{1\,.\,2}\varphi'' x+\ldots$$

et mettons le second membre, à partir du $n+1$ terme, sous la forme

$$\frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\,n}\left(\varphi^n x+\frac{h}{n+1}\,.\,\varphi^{n+1}x+\frac{h^2}{(n+1)\,(n+2)}\,.\,\varphi^{n+2}x\ldots\ldots\right).$$

Représentons la partie comprise dans la parenthèse par f et comparons-la à $\varphi^n(x+\theta h)$, dont le développement est donné par la série de Taylor, savoir :

$$\varphi^n(x+\theta h)=\varphi^n x+\frac{\theta\,.\,h}{1}\,.\,\varphi^{n+1}x+\frac{\theta^2\,.\,h^2}{1\,.\,2}\,.\,\varphi^{n+2}x+\ldots$$

$\varphi^n x$ étant la fonction primitive et $\varphi^{n+1}x$, $\varphi^{n+2}x$,... les dérivées successives de $\varphi^n x$. Cela posé, nous aurons

$$\begin{aligned} f-\varphi^n(x+\theta h)=&\left(\frac{1}{n+1}-\frac{\theta}{1}\right)h\,.\,\varphi^{n+1}x+\\ &\left(\frac{1}{(n+1)\,(n+2)}-\frac{\theta^2}{1\,.\,2}\right)h^2\,.\,\varphi^{n+2}x+\\ &\left(\frac{1}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}-\frac{\theta^3}{1\,.\,2\,.\,3}\right)h^3\,.\,\varphi^{n+3}x+\ldots(1)\end{aligned}$$

Si $\theta=0$, les coëfficients numériques de cette différence sont tous positifs ; si, au contraire $\theta=1$, les coëfficients en question deviennent tous négatifs. D'où il suit que les différences $f-\varphi^n x$ et $f-\varphi^n(x+h)$ sont de signes contraires ; et par suite, f est compris entre $\varphi^n x$ et $\varphi^n(x+h)$. Les trois quantités

$$\varphi^n x\,,\,f,\,\varphi^n(x+h)\,,$$

sont en même temps croissantes ou décroissantes.

Or, si la fonction $\varphi^n(a+\theta h)$, pour toutes les valeurs θ, comprises entre 0 et 1, ne donne que des valeurs croissantes ou décroissantes, on a également les trois quantités

$$\varphi^n x,\ \varphi^n(x+\theta h),\ \varphi^n(x+h)$$

croissantes ou décroissantes en même temps. D'où il suit que la fonction $\varphi^n(x+\theta h)$ en passant, par tous les états intermédiaires, entre $\varphi^n x$ et $\varphi^n(x+h)$, frappe nécessairement sur f, fonction également comprise entre $\varphi^n x$ et $\varphi^n(x+h)$. Par conséquent, il existe nécessairement une valeur intermédiaire de θ, comprise entre 0 et 1, qui donne

$$f=\varphi^n(x+\theta h).$$

Cette relation permet de mettre la série de Taylor, à partir de son $n+1$ terme, sous la forme

$$\varphi(x+h)=\varphi x+\frac{h}{1}.\varphi' x+\frac{h^2}{1.2}\varphi'' x+\ldots\ldots+\ldots+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}.\varphi^n(x+\theta h)$$

Le dernier le terme est ce qu'on nomme *terme complémentaire de la série de Taylor.*

Remarque I. Lagrange est le premier des géomètres qui ait démontré l'existence du terme complémentaire dans la série de Taylor.

La démonstration, que nous venons de donner, est tout-à-fait élémentaire, exempte des notions des maximums et minimums, sur lesquelles Lagrange a basé la sienne.

II. L'emploi du terme complémentaire, dans la série de Taylor, suppose que la fonction $\varphi^n x$ est toujours croissante ou décroissante, pour toutes les valeurs possibles, comprises entre x et $x+h$.

III. En posant $\theta=0$ et $\theta=1$, on trouve les limites de la série de Taylor. On parvient aux mêmes résultats en posant $\theta=\frac{1}{n+1}$ et $\theta=1$: comme il est facile de le démontrer, en examinant la différence, portée même n°, sous la marque (1).

§. II. *Équations aux puissances et aux combinaisons des racines de la proposée.*

8. Cette question d'Analyse combinatoire peut être posée comme il suit :

Etant donnée l'équation du degré m en x, savoir :

$$\varphi x = 0 = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m \qquad (1)$$

$a_0, a_1, a_2 \dots$ étant ses coefficients numériques ; construire les équations aux puissances et aux combinaisons quelconques des racines de la proposée.

1° Si d'abord on représente par $x_1, x_2, x_3, \dots x_m$, les m racines de la proposée, les puissances n de ces racines étant encore au nombre m, l'équation aux puissances n de la proposée sera aussi du degré m. On peut lui donner la forme

$$0 = a_{n/0} . z^m + a_{n/1} . z^{m-1} + a_{n/2} . z^{m-2} + \dots + a_{n/} \quad z + a_{./m} \qquad (2)$$

de sorte qu'en posant successivement $n = 1, 2, 3, \dots$ on a des notations fort commodes, pour désigner les équations aux puissances 1, 2, 3,... de la proposée, savoir :

$$\left.\begin{array}{l} 0 = a_{1/0} . z^m + a_{1/1} . z^{m-1} + \dots + a_{1/m-1} . z + a_{1/m}, \\ 0 = a_{2/0} . z^m + a_{2/1} . z^{m-1} + \dots + a_{2/m-1} . z + a_{2m}, \\ 0 = a_{3/0} . z^m + a_{3/1} . z^{m-1} + \dots + a_{3/m-1} . z + a_{3/m}, \\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\} (3).$$

2° En observant que les nombres des combinaisons de m racines de la proposée, sont marqués successivement par mC1, mC2, mC3... il s'agit en prenant les termes, qui composent l'une de ces combinaisons, pour racines d'une nouvelle équation, de construire cette dernière. Ainsi, les termes qui composent l'une de ces combinaisons étant au nombre mCn ; en les prenant pour des racines d'une nouvelle équation, cette dernière sera nécessairement du degré mCn et on peut lui donner la forme suivante :

$$0 = a_{mCn/0} . z^{mCn} + a_{mCn/1} . z^{mCn-1} + \dots + a_{mCn/mCn}. \qquad (4)$$

En posant successivement $n = 1, 2, 3, \dots$ on aura les notations fort commodes, pour désigner les équations aux combinaisons 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3,... des racines de la proposée, savoir :

$$\left.\begin{array}{l} 0 = a_{mC1/0} . z^{mC1} + a_{mC1/1} . z^{mC2-1} + \dots + a_{mC1/m}, \\ 0 = a_{mC2/0} . z^{mC2} + a_{mC2/1} . z^{mC2-1} + \dots + a_{mC2/mC2}, \\ 0 = a_{mC3/0} . z^{mC3} + a_{mC3/1} . z^{mC3-1} + \dots + a_{mC3/mC3}, \\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\} (5)$$

9. *Méthode de Newton pour calculer la somme des puissances n* des racines de la proposée.

On peut diviser l'équation (1) du n° précédent par a_0 : ce qui revient à supposer que le coefficient du premier terme est *un* et ceux des termes suivants des nombres quelconques que nous pouvons représenter par $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Le polynome de l'équation (1), n° précédent, ainsi préparé, est identique, comme on sait, avec le produit de m facteurs binomes, $x - x_1$, $x - x_2, \ldots x - x_m$, de sorte qu'on a

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m), \quad (1)$$

$x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ étant les m racines de l'équation $x + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0$. En prenant la dérivée première des deux membres de l'équation (1) on trouve

$$\begin{aligned} mx^{m-1} + (m-1)\, a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} = \\ (x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_m) + \\ (x - x_1).(x - x_3)\ldots(x - x_m) + \ldots \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la dérivée première de la proposée est la somme des produits de m facteurs binomes $x - x_1$, $x - x_2$, $x - x_3, \ldots x - x_m$, pris $m - 1$ à $m - 1$. Donc, en divisant le polynome de la proposée par sa dérivée on aura l'identité suivante :

$$\frac{mx^{m-1} + (m-1)\, a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}}{x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + a_m} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \ldots$$

Or, en développant $(x - x_1)^{-1}$, $(x - x_2)^{-1}, \ldots$ par la division ou par la formule de Newton, on trouve

$$\frac{1}{x - x_1} = \frac{1}{x} + \frac{x_1}{x^2} + \frac{x_1^2}{x^3} + \ldots$$

$$\frac{1}{x - x_2} = \frac{1}{x} + \frac{x_2}{x^2} + \frac{x_2^2}{x^3} + \ldots$$

etc. etc.

Ces équations sont au nombre m ; en les ajoutant et en représentant les sommes des puissances 1, 2, 3, ... des racines par s_1, s_2, $s_3, \ldots$ il vient

$$\frac{mx^{m-1} + (m-1)\, a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}}{x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m} = \frac{m}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \ldots$$

Multipliant cette égalité par $x^m + a_1 x^{m-1} + \dots$, on a

$$m x^{m-1} + (m-1) a_1 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} =$$
$$m x^{m-1} + \left.\begin{matrix} s_1 \\ + m a_1 \end{matrix}\right\} x^{m-2} + \left.\begin{matrix} s_2 \\ + a_1 s_1 \\ + m a_2 \end{matrix}\right\} x^{m-3} + \dots$$

Le premier membre de cette identité se compose de m termes et le second s'étend à l'infini. Or, dans toute identité, les coefficients de mêmes puissances de x, sont égaux : donc, en égalant les coefficients de m premiers termes, dans les deux membres de l'identité en question, on aura les m équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} 0 = s_1 + a_1, \\ 0 = s_2 + a_1 s_1 + 2 a_2, \\ 0 = s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3 a_3, \\ \text{etc.} \qquad \text{etc.} \\ 0 = s_m + a_1 s_{m-1} + a_2 s_{m-2} + \dots + m a_m. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Les termes, au-delà du m^e, dans le second membre de la même identité, sont affectés successivement de x^{-1}, x^{-2}, x^{-3},... et n'ont point de termes correspondants au premier membre ; ils doivent nécessairement se détruire d'eux-mêmes. D'où il résulte cette suite indéfinie d'équations,

$$\left.\begin{array}{l} 0 = s_{m+1} + a_1 s_m + a_2 s_{m-1} + \dots + a_m s_1, \\ 0 = s_{m+2} + a_1 s_{m+1} + a_2 s_m + \dots + a_m s_2, \\ \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \quad (3).$$

qui continuent les m équations, données ci-dessus sous la marque (2).

Ces équations sont dues à Newton. Elles servent à calculer, de proche en proche, les puissances 1, 2, 3,... des racines de la proposée. On voit aussi que ces équations donnent lieu à deux sortes de problèmes : 1° les coefficients de la proposée (1) a_1, a_2, a_3,... étant donnés calculer les sommes s_1, s_2, s_3,... ; 2° réciproquement, ces dernières étant données, calculer les premiers.

10. Cela posé, les racines de la proposée (1) n° 9, étant x_1, x_2, x_3,...x_m ; celles de la transformée aux puissances n des racines de la proposée seront x_1^n, x_2^n, x_3^n,... x_m^n. Or, les formules Newtoniennes, (2) et (3) du n° 9 donnent les puissances 1, 2, 3,... des racines de la transformée cherchée ; car, on a

$$s_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n + \dots + x_m^n,$$
$$s_{2n} = (x_1^n)^2 + (x_2^n)^2 + (x_3^n)^2 + \dots + (x_m^n)^2,$$
$$s_{3n} = (x_1^n)^3 + (x_2^n)^3 + (x_3^n)^3 + \dots + (x_m^n)^3,$$
etc. etc.

Donc, les mêmes formules Newtoniennes, en y remplaçant les $s_1, s_2, s_3, \dots$ par $s_n, s_{2n}, s_{3n}, \dots$ et $a_1, a_2, a_3, \dots$ par $a_{n/1}, a_{n/2}, a_{n/3}, \dots$ donneront

$$\left.\begin{aligned} 0 &= s_n + a_{n/1}, \\ 0 &= s_{2n} + s_n \,.\, a_{n/1} + 2a_{n/2}, \\ 0 &= s_{3n} + s_{2n} \,.\, a_{n/1} + s_n \,.\, a_{n/2} + 3a_{n/3}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$
etc. etc.

En faisant dans ces equations $n = 1, 2, 3, \dots$ on aura les équations propres au calcul des coefficients des transformées (3) du n° 8.

Remarque. Rien ne démontre que les transformées qui nous occupent sont du degré m ; car, pour que cela eût lieu, il faudrait démontrer, qu'en poussant le calcul de s_n, s_{2n}, s_{3n},... jusqu'à un indice quelconque, et en calculant les coefficients $a_{n|1}$, $a_{n|2}$, a_n ,... $a_{n\,m}$, au moyen de m premières équations, ci-dessus (1), les équations suivantes de la même catégorie ne sont que des équations de condition ou qu'elles ne donnent que zéro pour $a_{n/m+1}$, $a_{n/m+2}$, ... en supposant même que ces derniers coefficients subsistent. Nous admettons pour le moment que les transformées aux puissances entières quelconques des racines de la proposée sont toutes du degré m, par cette seule circonstance que si les racines de la proposée sont au nombre m, celles de l'une des transformées en question ne peuvent être, pour aucune raison apparente, du degré différent de m.

11. Ecrivons les transformées aux puissances 1, 2, 3, 4,... des racines de la proposée, l'une à la suite de l'autre,

$$(1) \left\{\begin{aligned} 0 &= z^m + a_{1/1} \,.\, z^{m-1} + a_{1/2} \,.\, z^{m-2} + \dots + a_{1/m-1} z + a_{1/m}, \\ 0 &= z^m + a_{1/1} \,.\, z^{m-1} + a_{2/2} \,.\, z^{m-2} + \dots + a_{2/m-1} z + a_{2/m}, \\ 0 &= z^m + a_{3/1} \,.\, z^{m-1} + a_{3/2} \,.\, z^{m-2} + \dots + a_{3/m-1} \; + a_{3/m}, \end{aligned}\right.$$
etc. etc.

et examinons les coefficients de même rang dans toutes ces équations.

On sait que dans une équation quelconque, dont le coefficient du premier terme est un, les coefficients des second, troisième, quatrième, etc. termes sont les sommes des combinaisons un à un, deux à deux, trois à trois, etc., des racines, prises alternativement en signe contraire et avec le même signe. Donc, les coefficients, tels que $a_{1|2}$, $a_{2|2}$, $a_{3|2}$, $a_{4|2}$,... sont les sommes des puissances 1, 2, 3, 4.... des combinaisons deux à deux des racines de la proposée. En calculant les coefficients $a_{1|2}$, $a_{2|2}$, $a_{3|2}$,... jusqu'à celui dont le rang est marqué par mC2, en remettant ces coefficients à la place de s_1, s_2, s_3,... dans les formules (2) du n° 9, et en remplaçant les coefficients a_1, a_2, a_3,... par ceux de la transformée aux combinaisons deux à deux de racines de la proposée, que nous désignerons par C_1, C_2, C_3,.... C_{mC2}, il viendra

$$(2)\quad \begin{cases} 0 = a_{1/2} + C_1, \\ 0 = a_{2/2} + a_{1/2}.C_1 + 2C_2, \\ 0 = a_{3/2} + a_{2/2}.C_1 + a_{1/2}.C_2 + 3C_3, \\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\ 0 = a_{mC2/2} + a_{mC2-1/2}.C_1 + \ldots. + mC2.C_{mC2}, \\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

Ces équations permettront de calculer C_1, C_2, C_3, ... ou les coefficients de la transformée aux combinaisons deux à deux des racines de la proposée. La somme des combinaisons deux à deux de m racines de la proposée, étant nécessairement le nombre marqué par mC2; le degré de la transformée en question est aussi mC2.

Généralement, la somme des combinaisons de m racines de la proposée, prises n à n étant mCn; l'équation aux combinaisons n à n des racines de la proposée sera nécessairement du degré mCn. Représentons cette équation par

$$(3)\ldots 0 = z^{mCn} + C_{mCn/1}.z^{mCn-1} + C_{mCn/2}.z^{mCn-2} + \ldots. + C_{mCn}.$$

Les coefficients $a_{1|n}$, $a_{2|n}$, $a_{3|n}$, ... dans les équations successives, ci-dessus (1), sont les puissances 1, 2, 3, 4, ... des combinaisons n à n des racines de la proposée, prises, selon le cas du nombre n pair ou impair, avec le même signe ou en signe contraire. Donc, selon le cas du nombre n pair ou impair, on aura les formules suivantes, pour le calcul des coefficients de la transformée aux combinaisons n à n, savoir:

$$(4)\ldots\quad\left\{\begin{aligned}
0 &= a_{1/n} + C_{mCn/1},\\
0 &= a_{2/n} + C_{mCn/1}\,.\,a_{1/n} + 2C_{mCn/2},\\
0 &= a_{3/n} + C_{mCn/1}\,.\,a_{2/n} + C_{mCn/2}\,.\,a_{1/n} + 3\,.\,C_{mCn/3},\\
&\text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.}
\end{aligned}\right.$$

$$(5)\ldots\quad\begin{aligned}
0 &= -a_{1/n} + C_{mCn/1},\\
0 &= -a_{2/n} - C_{mCn/1}\,.\,a_{1/n} + 2\,.\,C_{mCn/2},\\
0 &= -a_{3/n} - C_{mCn/1}\,.\,a_{2/n} - C\qquad .\,a_{1/n} + 3\,.\,C_{mCn/3},\\
&\text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.}
\end{aligned}$$

La remarque du n° précédent est ici applicable.

12. Avant de chercher le parti qu'on pourrait tirer, dans la détermination des racines, des transformées aux puissances entières quelconques ou aux combinaisons des racines de la proposée, je m'arrêterai sur la construction des s_1, s_2, s_3, ... au moyen des équations (2) et (3) du n° 9.

Le premier moyen qui s'y présente, c'est de trouver par induction la loi générale de leur construction.

Ce moyen se trouve compris dans celui que nous allons tout-à-l'heure exposer.

Soit $\quad \varphi x = x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m.$

En prenant les logarithmes des deux membres, on aura

$$l.\varphi x = lx^m + l\,(1 + a_1x^{-1} + a_2x^{-2} + \ldots + a_mx^{-m}).$$

Or, on a

$$x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m = (x - x_1)\,(x - x_2)\,\ldots.\,(x - x_m);$$

Donc

$$l.\varphi x = lx^m + l\,.\,(1 - x_1x^{-1})\,.\,(1 - x_2x^{-2})\,.\,(1 - x_3x^{-3})\ldots.$$

et par conséquent

$$l\,(1 + ax_1^{-1} + a_2x^{-2} + \ldots) = l\,(1 - x_1x^{-1}) + l\,(1 - x_2x^{-1}) + \ldots$$

Or, on sait que

$$l(1 - x_1x^{-1}) = -\left\{x_1x^{-1} + \frac{x_1^2x^{-2}}{2} + \frac{x_1^3x^{-3}}{3} + \ldots..\right\}.$$

Donc, en changeant x_1 en x_2, x_3, x_4, ... on aura m équations semblables à celle que nous venons d'écrire. En les ajoutant et en représentant les sommes des puissances 1, 2, 3, ... de x_1, x_2, x_3, ... par s_1, s_2, s_3, ..., on aura

$$l(1 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + \ldots) = -\left\{ s_1 x^{-1} + s_2 \cdot \frac{x^{-2}}{2} + s_3 \cdot \frac{x^{-3}}{3} + \ldots \right\}$$

D'où il résulte que le coëfficient du terme en x^{-n}, dans le développement du logarithme du polynome $1 + x^{-1} + a_2 x^{-2} + \ldots$ est précisément $-s_n : n$. On assignera ainsi la loi de construction de $s_1, s_2, s_3, \ldots$ en donnant celle du logarithme du polynome $1 + a_1 x^1 + a_2 x^{-2} + \ldots$ Nous aurons soin de revenir sur ce sujet n° 18.

Outre les deux méthodes signalées, pour trouver la loi de construction de la somme des puissances n des racines de la proposé, il existe encore une autre qu'il est utile de faire connaître.

Posons $x = z^{\frac{1}{n}}$ dans la proposée

$$0 = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots a_{m-1} x + a_m;$$

nous aurons

$$0 = z^{\frac{m}{n}} + a_1 z^{\frac{m-1}{n}} + a_2 z^{\frac{m-2}{n}} + \ldots + a_{m-1} z^{\frac{1}{n}} + a_m.$$

Or, $x = z^{\frac{1}{n}}$ donne $z = x^n$; d'où il résulte que les racines de cette dernière équation en z sont les puissances n de celles de la proposée. Si l'on désigne par α^1, α^2, α^3, ... α^n les n racines n[es] de l'unité qui, comme on le sait, sont des puissances successives de l'une d'elles ; on voit qu'à la place de x, dans la proposée, on pourra mettre arbitrairement l'une des expressions suivantes :

$$x = \alpha^1 \cdot z^{\frac{1}{n}},\ \alpha^2 \cdot z^{\frac{1}{n}},\ \alpha^3 \cdot z^{\frac{1}{n}},\ \ldots\ldots \alpha^n \cdot z^{\frac{1}{n}} \qquad (1)$$

D'où il résulte les n équations suivantes

$$(a) \begin{cases} 0 = \varphi_1 x = a_m + a_{m-1} \alpha^1 \cdot z^{\frac{1}{n}} + a_{m-2} \cdot \alpha^2 \cdot z^{\frac{2}{n}} + \ldots \\ 0 = \varphi_2 x = a_m + a_{m-1} \alpha^2 \cdot z^{\frac{1}{n}} + a_{m-2} \cdot \alpha^4 \cdot z^{\frac{2}{n}} + \ldots \\ 0 = \varphi_3 x = a_m + a_{m-1} \alpha^3 \cdot z^{\frac{1}{n}} + a_{m-2} \alpha^6 \cdot z^{\frac{3}{n}} + \ldots \\ \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots \\ 0 = \varphi_n x = a_m + a_{m-1} \alpha^n \cdot z^{\frac{1}{n}} + a_{m-2} \cdot \alpha^{2n} \cdot z^{\frac{2}{n}} + \ldots \end{cases}$$

dont chacune peut être prise pour la transformée aux puissances n des racines de la proposée. Le produit de ces n équations sera la transformée aux puissances n des racines de la proposée, dépourvue de toute irrationnalité. En effet si on prend l'une des racines de la proposée, telle que x_1, les équations ci-dessus (1) donneront

$$x_1 = \alpha^1 . z^{\frac{1}{n}},\ x_1 = \alpha^2 z^{\frac{1}{n}},\ x_1 = \alpha^3 z^{\frac{1}{n}},\ \ldots.$$

D'où il suit que

$$x_1 - \alpha^1 . z^{\frac{1}{n}}, x_1 - \alpha^2 . z^{\frac{1}{n}},\ x_1 - \alpha^3 . z^{\frac{1}{n}},\ x_1 - \alpha^4 . z^{\frac{1}{n}}, \ldots \quad (2)$$

sont les facteurs binomes correspondants des équations $0 = \varphi_1 x$, $0 = \varphi_2 x$, $0 = \varphi_3 x$, ... Multiplions ces facteurs binomes et cherchons leur produit. On sait que le produit de n facteurs binomes (2) est un polynome du degré n en x_1, auquel on peut donner la forme suivante :

$$x_1^n - b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} - b_3 x^{n-3} + \ldots + (-1)^n b_n . \quad (3)$$

b_1, b_2, b_3, ... b_n étant les sommes des combinaisons un à un, deux à deux, trois à trois, ... des seconds termes de binomes (2). Si l'on effectue ces combinaisons on verra qu'elles contiennent successivement $z^{\frac{1}{n}}$, $z^{\frac{2}{n}}$, $z^{\frac{3}{n}}$, ... pour facteur commun, et que l'opération des combinaisons ne frappe à proprement dire que sur α^1, α^2, α^3, ... α^n Nous pouvons conséquemment poser

$$b_1 = c_1 . z^{\frac{1}{n}},\ b_2 = c_2 . z^{\frac{2}{n}},\ b_3 = c_3 . z^{\frac{3}{n}},\ \ldots,$$

c_1, c_2, c_3, ... étant les sommes des combinaisons de α^1, α^2, α^3, ... α^n, pris un à un, deux à deux, trois à trois, etc. Ainsi, le produit (3) prend la forme suivante

$$x_1^n - c_1 z^{\frac{1}{n}} . x^{n-1} + c_2 . z^{\frac{1}{n}} x_1^{n-2} - c_3 z^{\frac{1}{n}} . x_1^{n-3} + \ldots + (-1)^n c_n . z \ldots (4)$$

Or α^1, α^2, α^3, ... α^n sont les racines de l'équation $\alpha^n - 1 = 0$, pour laquelle c_1, c_2, c_3, ... c_{n-1} sont nulles et $c^n = \pm 1$ selon que n est un nombre impair ou pair. Par suite de ces relations, l'expression (4) se réduit simplement à deux termes

$$x^n + (-1)^n . b_n z.$$

Si n est impair, on prendra $c_n = 1$, si n est pair on prendra $c_n = 1$: c'est ce qui réduit en tout cas l'expression (4) à

$$x_1{}^n - z.$$

Or, la même chose a lieu pour les autres racines x_2, x_3, x_4, ... Donc, le produit des n équations (a) revient à celui des m facteurs binomes

$$0 = x_1{}^n - z,\ 0 = x_2{}^n - z,\ 0 = x_6{}^n - z,\ ...\ 0 = x^n{}_m - z \quad (5)$$

et, par conséquent il n'est autre chose que la transformée aux puissances n des racines de la proposée.

Cette déduction est importante, parce qu'elle nous mène aux conséquences que voici :

1° La transformée aux puissances n des racines de la proposée ne peut se composer que d'un nombre fini des termes, comme le produit des n équations (a) ;

2° Puisque ce produit revient à celui des m facteurs binomes (5) ; la transformée en question sera nécessairement une équation du degré m en z ;

3° L'équation aux puissances n des racines de la proposée étant représentée par

$$0 = z^m + a_{n/1} . z^{m-1} + ... + a_{n/m-1} . z + a_{n/m},$$

si on y remplace z par x^n, l'équation

$$0 = x^{nm} + a_{n/1} . x^{n(m-1)} + a_{n/2} . x^{n(m-2)} + ... + a_{n/m}$$

est divisible par

$$0 = x^m + a_1 x^{m-1} + ... + a_m.$$

4° La formation de l'équation aux puissances n^{es} de la proposée a quelque analogie avec celle de la puissance n du polynome

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + ... a_m$$

car, si dans les équations (a) on fait partout $\alpha = 1$, leur produit revient à ce que nous venons de dire.

§. III. PUISSANCES D'UN POLYNOME.

13. Proposons nous actuellement de trouver le développement de la puissance m d'un polynome indéfini, tel que

$$u = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

On a d'après la formule de Maclaurin

$$u^m = u_0{}^m + \frac{du^m}{dx_0} \cdot \frac{x}{1} + \frac{d^2u^m}{du^2_0} \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots ;$$

les expressions, telles que

$$u_0{}^m, \frac{du^m}{dx_0}, \frac{d^2u^m}{dx^2_0}, \frac{d^3u^m}{dx^3_0}, \ldots.$$

désignant ce que deviennent u^m et ses dérivées successives, lorsqu'on y fait $x = 0$. Or, on a d'abord

$$d . u^m = mu^{m-1} . du ;$$

et, en posant pour abréger,

$$mu^{m-1} = \psi, \quad du = \varphi,$$

cette expression devient

$$d . u^m = \psi . \varphi.$$

En prenant des différentielles successives du produit $\psi \varphi$, on aura

$$\begin{aligned} d . \psi\varphi &= \psi . d\varphi + d\psi . \varphi, \\ d^2 . \psi\varphi &= \psi . d^2\varphi + 2d\psi . d\varphi + d^2\psi . \varphi, \\ d^3 . \psi\varphi &= \psi . d^3\varphi + 3d\psi . d^2\varphi + 3d^2\psi . d\varphi + d^3\psi . \varphi, \\ \text{etc.} & \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

et en général.

$$(a) \ldots \quad d^{n-1} . \psi\varphi = \psi . d^{n-1}\varphi + (n - 1C1) . d\psi . d^{n-2}\varphi + \ldots.$$

$(n - 1C1)$, $(n - 2C2)$. ... étant les coëfficients de la $(n - 1)^e$ puissance d'un binome. Remettant pour ψ et φ leurs valeurs dans l'expression (a), elle devient

$$\begin{aligned} (b) \ldots \quad d^n . u^m = mu^{m-1} . d^n u &+ (n - 1C1) . m . du^{m-1} d^{n-1} u + \\ &+ (n - 1C2) . m . d^2 u^{m-1} . d^{n-2} u + \ldots \end{aligned}$$

Changeant m en $m - 1$ dans cette expression et faisant successivement $n = 1, 2, 3, \ldots$ puis remettant les uns dans les autres les résultats obtenus, sans faire aucune sorte de réduction entre les termes semblables, on aura

$$d^n u^m = m u^{m-1} . d^n u +$$

$$n(-1C1) . m . d^{n-1} u . \Big\} m - 1 . u^{m-2} . du . \Big\{ +$$

$$(n - 1C1) . m . d^{n-2} u . \Big\{ m - 1 . u^{m-2} . d^2 u +$$

$$m - 1 . m - 2 . u^{m-3} . du \Big\} +$$

$$(n - 1C3) . m . d^{n-3} . u \Big\{ m - 1 . u^{m-2} . d^3 u +$$

$$2 . m - 1 . (m - 2 . u^{m-3} . du) d^2 u +$$

$$m - 1 . \Big[m - 2 . u^{m-5} . d^3 u + \ldots \Big] du \Big\} + \text{etc.}$$

Voici ce qu'on peut remarquer dans la construction de cette expression :

1° Un groupe quelconque, dont le rang serait marqué par le facteur général $(n - 1\,Cp) .\ m .\ d^{n-p} u$, aurait pour partie comprise entre $\{\ \ \}$ tous les termes qui précèdent subissant le changement de m en $m - 1$ et n en p.

2° Les coëfficients numériques des termes des parties comprises entre $\{\ \ \}$ sont ceux de la 1, 2, 3, etc. puissance, à partir du second groupe marqué par le facteur $(n - 1C1) .\ m$.

3° La juxtaposition des fonctions $d^n u^m$, $d^{n-1} u, \ldots$ comme facteurs fait voir que la somme des degrés de leurs caractéristiques est toujours la même et égale à n : ce qui résulte aussi de ce que l'expression $d^n u^m$ ne saurait se composer que des quantités qui en se multipliant produisent l'infiniment petit de l'ordre n.

4° La multiplication de m, $m - 1$, $m - 2, \ldots$ fait voir qu'une puissance quelconque de u, telle que u^{m-p} a pour facteur la factorielle $m^{p|\bar{1}}$, m en étant la base, p le nombre des facteurs et $\bar{1}$ (un négatif) l'accroissement.

5° Le nombre de tous les termes qui composent l'expression qui nous occupe est 2^{n-1}, réductible à un certain nombre de termes dissemblables, comme on le verra plus bas

Remarque. Pour rendre la lecture de l'expression $d^n u^m$ plus facile, je me suis servi de points, pour séparer les facteurs l'un de l'autre.

14. Cela posé, fesons pour abréger

$$m^{p/\overline{1}} . u^{m-p} = v^{(m-p)}$$

et supprimons partout la lettre u, l'expression de $d^n u^m$ prendra une forme plus simple, telle que

$$\begin{aligned} d^n u^m = {} & v^{(m-1)} . d^n + \\ & (n-1C1) . \left\{ v^{(m-2)} . d \right\} . d^{n-1} + \\ & (n-1C2) . \left\{ v^{(m-2)} . d^2 + (v^{(m-3)} . d)\, d \right\} . d^{n-2} + \\ & (n-1C3) . \Big\{ v^{(m-2)} . d^3 + 2 (v^{(m-3)} . d)\, d^2 + \\ & \qquad \left[v^{(m-2)} . d^2 + (v^{(m-3)} . d) d \right] d \Big\} d^{n-3} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Dans le but qu'on se propose d'appliquer cette formule au développement de u^m, on doit y poser $x = 0$; par-là

$$\begin{aligned} & u^m \text{ devient } a^m \\ & v^{(m-p)} \;\ldots\ldots\; m^{p/\overline{1}} . a^{m-p}; \end{aligned}$$

de plus, en différentiant u, et en fesant $x = o$ après la différentiation, on aura :

$$\begin{aligned} & du_o \text{ ou } d_o = 1 . a_1 . dx, \\ & d^2 u_o \text{ ou } d^2{}_o = 1 . 2 . a_2 . dx^2, \\ & d^3 u_o \text{ ou } d^3{}_o = 1 . 2 . 3 . a_3 . dx^3, \\ & \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

et, en général,

$$d^n u_o \text{ ou } d^n{}_o = 1^{n/1} . a_n . dx^n.$$

Cela posé, en divisant les deux membres de l'expression de $d^n u^m$ par dx^n, on pourra considérer les caractéristiques d, d^2, d^3,.... comme représentant les dérivées du même degré des fonctions qu'elles affectent. En considérant les expressions, telles que

$$v^{(m-p)} \text{ et } m^{p/1}.a^{m-1},$$

$$d^n \text{ et } 1^{n/1}.a_n,$$

comme identiques et divisant les deux membres de l'expression en $d^n u^m$ par 1^{n-1}, on a le coefficient du terme en x^n dans le développement de la série de Maclaurin qui donne u^m, n° 13. Il resterait à faire des réductions non seulement entre les termes semblables de chaque partie comprise entre $\{ \quad \}$, mais aussi entre les termes semblables qui en résultent : c'est ce qui fait aviser à un autre moyen plus expéditif de la formation de ce terme général. Comme les caractéristiques d, d^2, d^3,... représentent des fonctions, et dans l'hypothèse $x=0$, des lettres tout à fait différentes, il est nécessaire de distinguer les puissances des produits qui ne le sont pas : c'est pourquoi, dans ce qui suit, nous distinguerons les puissances, en écrivant leurs bases, entre les crochets, de sorte que $(d)^2$ et d^2 seront l'une la deuxième puissance de d et l'autre la dérivée seconde proprement dite.

15. Ordonnons maintenant le second membre de l'expression de $d^n u^m$, n° 14, d'après v, en prenant les indices de cette dernière quantité, dans l'ordre descendant ; nous aurons évidemment

$$d^n u^m = d^n.v^{(m-1)} + A.v^{(m-2)} + B.v^{(m-3)} + \ldots.$$

Comme on produit chaque partie de l'expression de $d^n u^m$, n° 13, en changeant dans tous les termes qui précèdent, m en $m-1$ et n en p ; la même règle servira à ordonner cette expression de $d^n u^m$ par rapport à v. C'est ainsi qu'on déduira le coefficient de $v^{(m-2)}$ de celui de v^{m-1} ; le coefficient de $v^{(m-3)}$ de celui de $v^{(m-2)}$; et ainsi de suite. En fesant dans le facteur d^n, qui multiplie $v^{(m-1)}$, $n = 1, 2, 3,$... et en multipliant ensuite les résultats par $(n-1C1).d^{n-1}$, $(n-1C2).d^{n-2}$, etc., on aura A, savoir :

$$A = (n-1C1).dd^{n-2} + n - 1C2.d^2 d^{n-2} + \ldots.$$

On voit, abstraction faite des coefficients $(n-1C1)$, $(n-1C2)$, $n-1C3$,... que les termes $d.d^{n-1}$, $d^2 d^{n-2}$,... produisent la même continuité que $d^{n-2}(d)^2$, c'est-à-dire la dérivée de l'ordre $n-2$ de $(d)^2$, qu'on déduirait de la formule (a) du n° 13, en posant $\psi = \varphi = d$ et en remplaçant n par $n-1$. Désignons cette circonstance par

$$A = \left[f.d^{n-2}(d)^2 \right].$$

De même, en fesant dans l'expression explicite de A, ci-dessus, $n=2$, 3, 4,... et en multipliant les résultats respectifs par $(n-1C2).d^{n-2}$, $(n-1C3).d^{n-3}$, etc., on aura B, savoir :

$$B=(n-1C2).\left[(d)^2\right].d^{n-2}+$$
$$(n-1C3).\left[2\,dd^2+d^2d\right]d^{n-3}+$$
$$(n-1C4).\left[3\,dd^3+3d^2d^2+d^3d\right]d^{n-4}+\ldots$$

Les parties comprises entre [ ] produisent les mêmes termes que les différentielles successives de $(d)^2$, savoir $(d)^2$, $d\,(d)^2$, $d^2\,(d)^2$,..... En posant, dans la formule (a) du n° 13, $\psi=d^2$, $\varphi=d$, et en remplaçant n par $n-3$, on aura la même continuité dans les termes de l'expression ainsi produite que dans celle de B, abstraction toutefois faite des coëfficients numériques, d'une et d'autre part : donc, on peut poser

$$B=\left[\,f.\,d^{n-3}\ (d)^3\,\right].$$

Fesons de nouveau dans l'expression explicite de B, $n=3$, 4, 5,... et multiplions les résultats obtenus successivement par $(n-1C3).d^{n-3}$, $(n-1C4).d^{n-4}$,... ; nous aurons C, savoir :

$$C=(n-1C3).\left[(d)^2.d\right]d^{n-3}+$$
$$(n-1C4).\left[3.(d)^2.d^2+(2dd^2+d^2d)\,d\right]d^{n-4}+$$
$$(n-1C5).\left[6.(d)^2.d^4+4\,(2dd^2+d^2d)\,d^3+\right.$$
$$\left.1.(3dd^3+3d^2d^2+d^3d)\,d\right]d^{n-5}+\text{etc.}$$

En nous servant de la remarque faite à l'égard de A et B, nous pouvons écrire

$$C=\left[f.\,d^{n-4}\,(d)^4\right]$$

et ainsi des autres. Ces valeurs de A, B, C,... substituées dans l'expression de $d^n u^m$ donneront

$$d^n n^m = d^n_m . m^{1/1} . a^{m-1} + \left[f.\ d^{n-1}\ (d)^2 \right] m^{2/1} . a^{m-2} +$$

$$+ \left[f. n^{n-2}\ (d)^3 \right] . m^{3/1} . a^{m-3} + \ldots .$$

expression qui fait voir que la dérivée n^e de u^m peut se développer suivant les puissances descendantes de a, depuis a^m, jusqu'à celle inclusivement dont l'exposant est marqué par zéro, multipliées respectivement et successivement par les factorielles

$$m^{1/1},\ m^{2/1},\ m^{3/1}, \ldots$$

16. Voyons maintenant qu'elle est la formation des coefficients successifs de a^{m-1}, a^{m-2}, a^{m-3},... dans l'expression de $d^n u^m$, n° 15.

Nous avons vu que les expressions de A, B, C,... se comportent de manière que partout la somme des caractéristiques des lettres d, employées comme facteurs, est constante et égale à n et que leur formation correspond, quant au nombre et à la succession des termes, à celle de (b) n° 15: c'est pourquoi nous avons désigné les coefficients A, B, C, D,... par

$$\left[f.\ d^{n-2}\ (d)^2 \right],\ \left[f.\ d^{n-3}\ (d)^3 \right],\ \left[f.\ n^{n-4}\ (d)^4 \right], \ldots$$

D'où il résulte que si l'on connaît les développements successifs d^{n-2} de $(d)^2$, d^{n-3} de $(d)^3$,... quant au nombre et à la succession des termes, on connaît aussi la formation des coefficients en question sous ce dernier rapport.

On sait que tous les termes du développement

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots .)^m$$

sont compris dans l'expression générale suivante

$$\frac{m^{n'/1} . \alpha^{m-n'} . \beta^q . \gamma^r . \delta^s \ldots .}{1^{q/1} . 1^{r/1} . 1^{s/1} \ldots}$$

dans laquelle il faut prendre pour q, r, s,... toutes les valeurs entières, y compris zéro, qui satisfont à l'équation $n' = q + r + s + \ldots$ En posant $\alpha = a$, $\beta = a_1 x$, $\rho = a_2 x^2$,... le polynome à développer est

$$u^m = (a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^m$$

et l'expression qui en comprend tous les termes est

$$(a) \qquad \frac{m^{n'/\overline{1}} . a^{m-n'} . a_1^{q} . a_2^{r} . a_3^{s} \ldots . x^{q+2r+3s+\ldots}}{1^{q/1} . 1^{r/1} . 1^{s/1} \ldots}$$

Pour appliquer cette expression à la recherche des termes affectés de x^n dans le développement de u^m, il faut d'abord poser

$$n = q + 2r + 3s + \ldots$$

et déterminer toutes les valeurs entières positives, y compris zéro, de q, r, s,... puis en conclure la grandeur de n' qui est

$$n' = q + r + s + \ldots$$

Or, nous avons prouvé que la dérivée n de u^m, divisée par $1^{n|1}$, se développe suivant les puissances descendantes de a, savoir :

$$a^{m-1}, a^{m-2}, a^{m-3}, a^{m-4}, \ldots a^0$$

multipliées respectivement par

$$m^{1/\overline{1}}, m^{2/\overline{1}}, m^{3/\overline{1}}, \ldots m^{n/\overline{1}}$$

Donc, en détachant le facteur $m^{n'/\overline{1}} a^{m-n'} x^n$ de l'expression, ci-dessus (1), les coefficients A, B, C, D,... de $d^n u^m$ divisé par $1^{n|1}$, nº 15, seront compris dans l'expression

$$\frac{a_1^{q} . a_2^{r} . a_3^{s} . \ldots}{1^{q/1} . 1^{r/1} . 1^{s/1} \ldots}$$

De plus nous avons prouvé que les coefficients A, B, C,... ne comprennent successivement qu'un, deux, trois,... facteurs, de manière que la somme des indices des caractéristiques d soit toujours égale à n. Donc, en remplaçant les lettres d, par les lettres a_1, a_2 a_3,...;

la même loi aura lieu pour ces dernières. D'où il résulte que les coëfficients A, B, C ,... ne comprennent successivement qu'une, deux, trois,... des lettres a_1, a_2, a_3, ..., de manière que la somme des indices y soit toujours égale à n, et chaque puissance d'une lettre, marquée par l'exposant q, divisée par la factorielle $1^{q/1}$.

Cela posé, la formation des termes du développement de u^m, contenus dans le groupe affecté de x^n, donne à résoudre le problème suivant :

Étant données n lettres, telles que,

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ a_n$$

marquées successivement par les indices 1, 2, 3, ... n, d'après le rang qu'elles occupent dans la suite, en former tous les arrangements 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, ... n à n de manière que la somme des indices des lettres employées, soit égale à n, une lettre quelconque pouvant y être prise plusieurs fois facteur d'elle-même, et chaque puissance d'une lettre, marquée par l'exposant q, y étant divisée par la factorielle $1^{q/1}$.

En désignant par $a_n c1$, $a_n c2$, $a_n c3$, ... les arrangements ainsi définis, le développement de u^m sera exprimé comme il suit :

$$\begin{aligned} u^m &= (a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)^m \\ &= a^m + a_1 c1.\, m^{1/1}.\, a^{m-1}.\, x + \\ &\quad \left.\begin{aligned} &+ a_2 c1.\, m^{1/1}.\, a^{m-1} \\ &+ a_2 c2.\, m^{2/1}.\, a^{m-2} \end{aligned}\right\} x^2 + \\ &\quad \left.\begin{aligned} &+ a_3 c1.\, m^{1/1}.\, a^{m-1} \\ &+ a_3 c2.\, m^{2/1}.\, a^{m-2} \\ &+ a_3 c3.\, m^{3/1}.\, a^{m-3} \end{aligned}\right\} x^3 + \\ &\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

L'expression générale du groupe contenant x^n pour facteur sera

$$a_n c1.\, m^{1/1}.\, a^{m-1} + a_n c2.\, m^{2/1}.\, a^{m-2} + \dots + a^n c n.\, m^{n/1}.\, a^o.$$

Nous reviendrons sur la formation de ce groupe dans un chapitre à part, que nous consacrerons à *la partition des nombres.*

17. Passons actuellement au développement du logarithme d'une fonction, z étant un nombre ou une fonction d'une seule variable x

et la caractéristique l étant employée pour désigner le logarithme naturel de ce nombre ou de cette fonction, on a

$$lz = \infty . \left(z^{\frac{1}{\infty}} - \right.$$

Soit maintenant

$$u = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots$$

ou bien

$$u = \alpha (1 + a_1 x + a_2 x^2 + a^3 x^3 + \ldots)$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{\beta}{\alpha} = a_1 , \frac{\gamma}{\alpha} = a_2 , \frac{\delta}{\alpha} = a_3 , \ldots$$

Donc

$$lu = la + l (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)$$

Or,

$$l (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) = \frac{1}{\infty} \left[(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^{\frac{1}{\infty}} - 1 \right].$$

En posant $a = 1$, dans le développement de u^m et en remplaçant m par $\frac{1}{\infty}$, la factorielle générale $m^{n/1}$ deviendra

$$\frac{1}{\infty} \cdot \left[\bar{1}^{n-1/\bar{1}} \right] = \frac{1}{\infty} \cdot \left(\bar{1} \right)^{n-1} . 1^{n-1/1} .$$

Donc

$$\begin{aligned} & l (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) = \\ & a_1 c 1 . x + (a_2 c 1 - a_2 c 2 . 1^{1/1}) x^2 + \\ & \quad + (a_3 c 1 - a_3 c 2 . 1^{1/1} + a_3 c 3 . 1^{2/1}) x^3 + \\ & + \ldots . \end{aligned}$$

L'expression générale du coëfficientde x^n sera comme il suit :

$$a_n c1 - 1^{1/1} . a_n c2 + 1^{2/1} . a_n c3 - \text{etc.}$$

18. Nous avons prouvé, n° 12, que la somme des puissances n des racines d'une équation, prise avec le signe — et divisée par n est le coefficient du terme en x^{-n}, dans le développement du logarithme de

$$1 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + a_3 x^{-3} + \dots$$

Donc, d'après ce qui a été exposé, n° 17, on aura

$$(a) \dots s_n = -n \left\{ a_n c1 - 1^{1/1} . a_n c2 + 1^{2/1} . a_n c3 - \dots \right\}$$

Nous mettrons ici les expressions de s_1, s_2, s_3, s_4, ... afin de fixer les idées sur la formation de $a_n c1$, $a_n c2$, ...

$$s_1 = -a_1,$$

$$s_2 = -2 \left\{ a_2 - 1^{1/1} . \left(\frac{a_1^2}{1.2} \right) \right\},$$

$$s_3 = -3 \left\{ a_3 - 1^{1/1} . (a_1 a_2) + 1^{2/1} . \left(\frac{a_1^3}{1.2.3} \right) \right\},$$

$$s_4 = -4 \left\{ a_4 - 1^{1/1} . \left(a_1 a_3 + \frac{a_2^2}{1.2} \right) + 1^{2/1} \left(\frac{a_1^2 a_2}{1.2} \right) + - 1^{3/1} . \left(\frac{a_1^4}{1.2.3.4} \right) \right\},$$

etc., etc.

Le problème inverse de celui que nous venons de résoudre consiste à trouver a_1, a_2, a_3, ... en fonction de s_1, s_2, s_3, ... En employant les formules (2) et (3) du n° 9, on trouvera

$$a_1 = -\frac{s_1}{1},$$

$$a_2 = -\frac{s_2}{2} + \frac{s_1^2}{1.2},$$

$$a_3 = -\frac{s_3}{3} + \left(\frac{s_1}{1} . \frac{s_2}{2} \right) - \frac{s_1{}^{,}}{1}$$

$$a_4 = -\frac{s_4}{4} + \left(\frac{s_1}{1}\cdot\frac{s_3}{3} + \frac{1}{1^{2/1}}\cdot\frac{s_2^{\,2}}{4}\right) - \left(\frac{1}{1^{2/1}}\cdot\frac{s^3}{1}\cdot\frac{s^2}{2}\right) + \frac{s_1^{\,4}}{1^{4/1}}$$

etc., etc.

Généralement, si on pose

$$c_1 = \frac{s_1}{1},\ c_2 = \frac{s_2}{2},\quad c_3 = \frac{s_3}{3},\quad c_4 = \frac{s_4}{4},\ldots$$

la loi de formation de a_n est la suivante :

$$(b) \ldots\ldots a_n = -c_nc1 + c_nc2 - c_nc3 + c_nc4 - \text{etc.}$$

c_nc1, c_nc2, c_nc3, ... étant les mêmes opérations à l'égard de c_1, c_2, c_3, ... c_n que celles que nous avons désignées, n° 16, par a_nc1, a_nc2, a_nc3, ...

Il y a une certaine analogie entre la formule (b) et celle qu'il faut employer pour revenir du logarithme d'une fonction à la fonction elle-même. En effet, la fonction étant mise sous la forme

$$\varphi x = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x + \ldots$$

et son logarithme sous la forme

$$l\varphi x = c_1 x + c_3 x^2 + c_2 x^3 + c_4 x^4 + \ldots;$$

on aura

$$a_1 = c_1,$$

$$a_2 = c_3 + \frac{c_1^{\,2}}{1.2},$$

$$a_3 = c_3 + c_1c_2 + \frac{c_1^{\,3}}{1.2.3}$$

etc. etc.

et généralement

$$(c) \ldots\ldots a_n = c_nc1 + c_nc2 + c_nc3 + c_nc4 + \ldots$$

19. Nous avons démontré que l'équation aux puissances n des racines de la proposée résulte du produit de n équations (a) du n° 12. Remplaçons dans toutes les équations $z^{\frac{1}{n}}$ par v et divisons-les toutes par a ; nous pouvons donner à ces n équations la forme suivante :

$$0 = \varphi_1 v = 1 + a_1\alpha^1 . v + a_2\alpha^2 . v^2 + a_3 . \alpha^3 v^3 + \ldots$$
$$0 = \varphi_2 v = 1 + a_1\alpha^2 v + a_2\alpha^4 . v^2 + a_3\alpha^6 . v^3 + \ldots$$
$$0 = \varphi_3 v = 1 + a_1\alpha^3 . v + a_2\alpha^6 . v^2 + a_3\alpha^8 . v^3 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$0 = \varphi_n v = 1 + a_1\alpha^n . v + a_2\alpha^{2n} . v^2 + a_3\alpha^{3n} . v^3 + \ldots$$

L'équation aux puissances n des racines de la proposée, sera

$$0 = \varphi_1 v . \varphi_2 v . \varphi_3 v \ldots . \varphi_n v.$$

Or, si nous concevons d'abord la fonction

$$\varphi v = 1 + a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3 + \ldots$$

nous aurons pour son logarithme

$$l\varphi v = c_1 v + c_2 v^2 + c_3 v^3 + c_4 v^4 + \ldots$$

Remplaçons dans ce dernier développement, v par $\alpha^1 v$, $\alpha^2 v$, $\alpha^3 v$, ... et il viendra

$$l\varphi_1 v = c_1\alpha^1 . v + c_2\alpha^2 . v^2 + c_3\alpha^3 . v^3 + \ldots$$
$$l\varphi_2 v = c_1\alpha^2 . v + c_2\alpha^4 . v^2 + c_3\alpha^6 . v^3 + \ldots$$
$$l\varphi_3 v = c_1\alpha^3 . v + c_2\alpha^6 . v^2 + c_3\alpha^9 . v^3 + \ldots$$
$$\ldots\ldots$$
$$l\varphi_n v = c_1\alpha^n . v + c^2\alpha^{2n} . v^2 + c_3\alpha^{3n} . v_3 + \ldots$$

En ajoutant ces logarithmes, on aura évidemment

$$(a) \ldots \quad l(\varphi_1 v . \varphi_2 v . \varphi_3 v \ldots . \varphi_n v) = c_1 t_1 v + c_2 t_2 v^2 + c_3 t_3 v^3 + \ldots$$

expression, dans laquelle t_1, t_2, t_3, ... sont les sommes des puissances 1, 2, 3, ... des racines de l'équation $\alpha^n - 1 = 0$.

En appliquant à l'équation $\alpha^n - 1 = 0$, les formules Newtoniennes du n° 9, on trouvera

$$t_1 = 0,\ t_2 = 0,\ t_3 = 0,\ \ldots t_n = n$$
$$t_{n+1} = 0,\ t_{n+2} = 0,\ t_{n+2} = 0, \ldots t_{2n} = n$$
$$\text{etc.,} \qquad\qquad \text{etc.}$$

de sorte que toutes les expressions de t sont nulles à l'exception de

$$t_n = t_{2n} = t_{3n} = \ldots = n.$$

Cela posé, l'équation (a) devient

$$(b) \ldots\ l(\varphi_1 v.\ \varphi_2 v.\ \varphi_3 v. \ldots \varphi_n v) = n c_n . v^n + n . c_{2n} . v^{2n} + n . c_{3n} . v^{3n} + \ldots$$

Tel est enfin le logarithme du polynome de l'équation aux puissances n des racines de la proposée. Les formules (c) du n° 18 permettront de revenir du logarithme à la fonction primitive.

Observons encore que, dans l'équation $\alpha^n - 1 = 0$, toutes les racines sont imaginaires, à l'exception de l'une d'elles qui est 1 et qu'on peut mettre en évidence. Donc, en désignant par $i_1, i_2, i_3, \ldots$ les sommes des puissances 1, 2, 3, ... des racines imaginaires en question, on aura, d'après ce qui précède

$$i_1 + 1 = 0,\ i_2 + 1 = 0,\ i_3 + 1 = 0, \ldots i_n + 1 = n,$$
$$i_{n+1} + 1 = 0,\ i_{n+2} + 1 = 0,\ i_{n+3} + 1 = 0, \ldots i_{2n} + 1 = n,$$
$$\text{etc.,} \qquad\qquad \text{etc.}$$

d'où l'on tire

$$i_1 = i_2 = i_3 = \ldots = -1,$$
$$i_{n+1} = i_{n+2} = i_{n+3} = \ldots = -1,$$
$$\text{etc.,} \qquad\qquad \text{etc.}$$
$$i_n = i_{2n} = i_{3n} = \ldots = (n - 1).$$

En remplaçant, dans l'équation (a), tous les t par -1 et ceux dont le rang est multiple de n par $n - 1$; on aura la logarithme du quotient du polynome de l'équation aux puissances n des racines de la proposée, par le polynome de la proposée elle-même, savoir :

$$(c) \ldots\ldots\ l(\varphi_1 v.\ \varphi_2 v.\ \varphi_3 v\ \ldots\ \varphi_{n-1} v) =$$

$$-c_1 v - c_2 v^2 - c_3 v^3 - \ldots + c_n (n-1)\, v^n +$$

$$-c_{n+1}\, v^{n+1} - c_{n+2}\, .\, v^{n+2} - \ldots + c_{2n}\,(n-1)\, v^{2n} + \ldots$$

La formule (c) du nº 18 permettra de remonter du logarithme à la fonction primitive.

Remarques. I. Nous avons tous les moyens possibles pour construire l'équation aux puissances quelconques des racines de la proposée, et le quotient du polynome de cette équation par le polynome de la proposée. Pour construire la première de ces équations, on aura recours aux formules (1) du nº 10, ou bien on reviendra du logarithme du polynome de cette équation au polynome lui-même, comme nous l'avons dit à l'égard de la formule ci-dessus (b). Quant à la seconde, on en a le logarithme donné ci-dessus, sous la marque (c).

II. Le logarithme d'une fonction, que nous avons donné, nº 17, fournit un moyen très-commode pour calculer le logarithme d'un nombre, donné en fraction décimale et qui est compris entre 1 et 2. En effet, si l'on exécute les opérations marquées par $a_1 c 1$, $a_2 c 1$, $a_2 c 2$, etc. on aura

$$l(1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots) =$$

$$a_1 x + \left\{\begin{matrix} a_2 \\ -\frac{1}{2}.\, a_1^2 .\, 1 \end{matrix}\right\} x^2 + \left\{\begin{matrix} a_3 . \\ -\, a_1 a_2 .\, 1^{1/1} \\ +\, \frac{a_1^3}{1^{3/1}} .\, 1^{2/1} \end{matrix}\right\} x^3 + \left\{\begin{matrix} a_4 \\ -\left[a_1 a_3 + \frac{a_2^2}{1.2}\right] 1^{1/1} \\ +\, \frac{1}{2} a_1^2 .\, a_2 .\, 1^{2/1} \\ -\, \frac{a_1^4}{1^{4/1}} .\, 1^{3/1} \end{matrix}\right\} x^4 + \text{etc.}$$

En posant $x = 0{,}1$ et en supposant que a_1, a_2, a_3, a_4,.... sont des nombres quelconques, y compris zéro et plus petits que 10; l'expression telle que $1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ est nécessairement une fraction décimale. En substituant pour a_1, a_2, a_3 ,... leurs valeurs, dans le développement ci-dessus, chaque groupe donnera un nombre plus

petit que l'unité divisée par le rang du groupe en x : voici comment nous pouvons démontrer cette circonstance.

Un polynome étant mis sous la forme

$$1 + a_1x + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x^4 + \ldots;$$

le groupe affecté de x^n, dans le développement de la puissance m de ce polynome, aura pour expression

$$T = n.a\ c1 + n^{2|\overline{1}}.a_nc2 + n^{3|\overline{1}}.a_nc3 + \ldots$$

Cela posé, cherchons ce que devient T, dans le cas de toutes les lettres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ égales à c.

Nous avons prouvé, remarque 5 du n° 13, que le nombre total des termes qui composent T, lorsqu'on ne les réduit pas, est 2^{n-1} et particulièrement ceux des groupes qui donnent lieu à a_nc1, a_nc2, $a_nc3, \ldots$ sont 1, $(n-1C1)$, $(n-1C2)$, $(n-1C3)$, ... nombres qui sont les termes du développement de $(1+1)^{n-1}$.

Cela posé, désignons par $\overline{a}_nc1$ $\overline{a}_nc2$ $\overline{a}_nc3$, ... ce que devient a_nc1, a_nc2, a_nc3, ... dans le cas de toutes les lettres égales à c.

Il est d'abord évident qu'on a

$$\overline{a}_n c1 = c.$$

L'opération a_nc2 contient des arrangements des deux lettres, dont la somme des indices est égale à n, et tels que celui qui a une lettre au carré est divisé par 2. Fesons toutes les permutations possibles avec les arrangements, contenus dans a_nc2 : les arrangements des deux lettres différentes donneront chacun deux permutations, et celui qui a une lettre au carré une seule. Or les permutations, que nous effectuons actuellement, nous font remonter aux expressions initiales, signalées n° 13, et dont le nombre est $(n - 1C1)$. D'une autre part, si on réduit tous les termes de a_nc2 au même dénominateur 2, chaque arrangement des deux lettres différentes aura pour numérateur 2 et celui d'une lettre au carré, le nombre 1. En fesant, dans a_nc2, toutes les lettres égales à c, on aura c^2 pour facteur commun, et la somme des coëfficients numériques de tous les termes réduits au même dénominateur 2, sera précisément $(n-1C1)$. Donc

$$\overline{a_n} c\,2 = \frac{(n-1C1)}{1.2}\cdot c^2.$$

Le nombre des permutations différentes qu'on peut faire avec les arrangements de $a_n c3$ est, d'après n° 13, $(n-1C2)$. Chaque terme ayant trois lettres différentes ou une lettre au carré ou une lettre au cube, donnera lieu à 3.2.1 permutations ou à 3 ou à une seule. Or, si l'on réduit l'expression $a_n c3$ au même dénominateur 3.2.1, les numérateurs ayant trois lettres différentes auront pour coëfficient numérique le nombre 6; ceux qui ont une lettre au carré, le nombre 3; et ceux enfin qui ont une lettre au cube, le nombre 1. Donc, en supposant toutes les lettres égales à c, dans $a_n c3$, la somme des coëfficients numériques sera égale à $(n-1C2)$. Multipliant par c^3 divisant par 1.2.3 le nombre $(n-1C2)$, on aura

$$\overline{a_n} c\,3 = \frac{(n-1\,C2)}{1.2.3}\cdot c_1.$$

On aura de la même manière

$$\overline{a_n} c\,4 = \frac{(n-1\,C3)}{1.2.3.4}\cdot c^4,$$

$$\overline{a_n} c\,5 = \frac{(n-1\,C4)}{1.2.3.4.5}\cdot c^5,$$

etc., etc.

Si on applique ces résultats au développement du logarithme, donné ci-dessus, dans le cas de toutes les lettres égales à c, on aura

$$l(1+cx+cx^2+cx^3+\dots)=$$

$$\left.\begin{array}{l} cx+c \\ -\dfrac{c^2}{2}.1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x^2+c \\ \quad -c^2.1 \\ \quad +\dfrac{c^3}{1.2.3}.1.2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x^3+c \\ \quad -\dfrac{3.c^2}{1.2}.1 \\ \quad +\dfrac{c^3}{2}.1.2 \\ \quad -\dfrac{c^4}{2.3.4}.1.2.3 \end{array}\right\} x^4+\text{etc.}$$

Généralement, le coëfficient du terme en x^n sera

$$T = c - \frac{n-1}{2} \cdot c^2 \cdot 1 + \frac{n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} c^3 \cdot 1^{2/1} - \frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} c^4 \cdot 1^{3/1} + \text{etc.}$$

ou bien

$$T = c - \frac{n-1}{2} \cdot c^2 + \frac{n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} c^3 - \frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} c^4 + \text{etc.}$$

On tire de cette expression

$$T \cdot n - 1 = -\left(1 - nc + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} c^2 - \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} c^3 + \ldots\right);$$

ou bien

$$T \cdot n - 1 = -(1-c)^n,$$

d'où

$$T = \frac{1-(1-c)^n}{n}.$$

Ainsi, le développement du logarithme de $1 + cx + cx^2 + \ldots.$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$l(1 + cx + cx^2 + cx^3 + \ldots.) =$$

$$\frac{1-(1-c)}{1} \cdot x + \frac{1-(1-c)^2}{2} \cdot x^2 + \frac{1-(1-c)^3}{3} \cdot x_3 + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{1-(1-c)^n}{n} \cdot x^n.$$

Pour que $1 + cx + cx^2 + \ldots$ soit une fraction décimale, il faut qu'on ait $x = 0{,}1$ et $c = 9$, au plus. Donc, pour ces hypothèses, le terme en x^n du développement se réduira à

$$\frac{1-(1-9)^n}{n} \cdot \frac{1}{10^n} = \frac{1-(-8)^n}{n} \cdot \frac{1}{10^n}$$

expression qui est plus petite, abstraction faite du signe, que 1 divisé par n.

Donc, dans le cas d'une fraction décimale, telle que $1+a_1x+a_2x^2+\ldots$ le développement du logarithme de cette fraction est à moins de 1 divisé par le rang du terme, auquel on arrête ce développement.

III. En mettant un polynome sous la forme

$$1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$$

le coëfficient du terme en x^n, dans le développement de la puissance m de ce polynome et dans le cas de $a_1=a_2=a_3=\ldots=1$, étant représenté par T, on a

$$T=m+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{n-1}{1}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}+\ldots(1)$$

Or, dans le cas qui nous occupe, le polynome à développer n'est autre chose que

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots$$

d'où

$$(1-x)^{-m}=(1+x+x^2+x^3+\ldots)^m$$

Or, le terme général de $(1-x)^{-m}$, d'après la formule de Newton, est

$$(-1)^n\cdot\frac{-m}{1}\cdot\frac{-m-1}{2}\cdot\frac{-m-2}{3}\cdots\cdot\frac{-m-n+1}{n}\cdot x^n$$

$$=\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdots\cdot\frac{m+n-1}{n}\cdot x^n\ldots(2)$$

quel que soit le nombre n pair ou impair. Donc, en comparant l'expression de T, ci-dessus donnée sous la marque (1), avec le coëfficient de x^n, donné en (2), on aura :

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdots\cdot\frac{m+n-1}{n}=$$

$$m+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{1}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}+\ldots$$

20. Les transformées aux puissances 2, 4, 8, 16, ... des racines de la proposée peuvent encore s'obtenir de la manière suivante.

Soit

$$0 = a_m + a_{m-1}x + a_{m-2}x^2 + \dots$$

équation proposée. En séparant les termes affectés des puissances paires et impaires de x, on aura

$$a_m + a_{m-2}x^2 + \dots = -x\left(a_{m-1} + a_{m-3}x^2 + \dots\right)$$

Soit maintenant $x = z^{\frac{1}{2}}$, comme on a $z = x^2$, la transformée en z sera nécessairement l'équation au carré des racines de la proposée. Or, en posant $x = z^{\frac{1}{2}}$, il vient

$$a_m + a_{m-2}z + a_{m-4}.z^2 + \dots = -z^{\frac{1}{2}}\left(a_{m-1} + a_{m-3}z + \dots\right)$$

En élevant les deux membres au carré, on aura

$$\left(a_m + a_{m-2}.z + a_{m-4}.z^2 + \dots\right)^2 =$$

$$z\left(a_{m-1} + a_{m-3}z + a_{m-5}.z^2 + \dots\right)^2$$

ou bien,

$$a_m^2 + 2a_m.a_{m-2}.z + a_{m-2}^2.z^2 + 2a_m a_{m-4}z^2 +$$

$$+ 2a_{m-2}.a_{m-4}z^3 + a^2_{m-4}z^4 +$$

$$= a^2_{m-1}z + 2a_{m-1}.a_{m-3}z^2 + a_{m-3}^2 z^3 +$$

$$+ 2a_{m-1}a_{m-5}z^3 \dots$$

Réduisant à zéro, on aura

$$0 = a^2_m + \left(2a_m . a_{m-2} - a_{m-1}^2\right) z +$$
$$+ \left(2a_m . a_{m-4} - 2a_{m-1} . a_{m-3} + a^2_{m-2}\right) z^2 +$$
$$+ \left(2a_m . a_{m-6} - 2a_{m-1} . a_{m-5} + 2a_{m-2} . a_{m-4} + \right.$$
$$\left. - a^2_{m-3}\right) z^3 + \ldots .$$

Cette même équation peut s'écrire d'une autre manière que voici

$$0 = a^2_0 z^m + \left(2 a_0 a_2 - a^2_1\right) z^{m-1} +$$
$$+ \left(2 a_0 a_4 - 2 a_1 a_3 + a_2^2\right)^2 z^{m-2} +$$
$$+ \left(2 a_0 a_6 - 2 a_1 a_5 + 2 a_2 a_4 - a_3^2\right) z^{m-3} + \ldots$$

De cette dernière équation on s'élèvera à l'équation aux puissances 4 des racines de la proposée; et ainsi des autres.

§ IV. *Partition des nombres.*

21. La *partition des nombres* a pour objet de décomposer un nombre s en somme de n autres plus simples.

Il faut distinguer la partition de la répartition des nombres; car, répartir n objets entre s autres : c'est trouver toutes les manières possibles dont on peut distribuer n objets entre s autres; et par conséquent c'est effectuer toutes les combinaisons possibles de s lettres différentes, prises n à n.

22. Le problème de la partition des nombres peut être énoncé, comme il suit :

Etant données les s lettres, telles que

$$a_1, a_2, a_3, \ldots . a_s \qquad (1)$$

désignées par les indices 1, 2, 3, ... s, d'après le rang qu'elles occu-

pent dans la suite, en former tous les arrangements possibles, composé des 1, 2, 3,...facteurs égaux ou inégaux, de manière que la somme des indices des lettres employées soit toujours égale à s.

De la résolution de ce problème dépend nécessairement la formation du groupe en x^n, dans le développement de la puissance n du polynome $1 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots$ et dans celui du logarithme de ce même polynome. Voir, pour cet effet, les n° 16 et 17.

23. Je désignerai par les notations

$$a_1s,\ a_2s,\ a_3s, \dots\ a_ns$$

l'ensemble des arrangements, composés de 1, 2, 3,... n facteurs égaux ou inégaux, et par

$$1_s, 2_s, 3_s, \dots\ n_s$$

les *nombres partitifs* ou la totalité des manières différentes d'effectuer la partition du nombre s en 1, 2, 3, ... n autres plus simples.

24. Observons que la partition a_1s ne peut comprendre qu'une seule lettre a_s, de sorte que la partition et le nombre partitif correspondant sont

$$a_1s = a_s,\ 1_s = 1.$$

Il est aisé de voir que la partition a_2s ne peut comprendre que les $s-1$ premières lettres de la suite (1) n° 22; car, la lettre a_s, multipliée par une autre quelconque de la même suite, donne pour somme des indices un nombre plus grand que s. De même, les partitions a_3s, a_4s a_5s,... ne comprennent successivement que les $s-2$, $s-3$, $s-4$,... premières lettres de la suite (1) n° 22; généralement, la partition a_ns ne comprend que les $s-n+1$ premières lettres de cette même suite.

Puisque la partition a_ns ne comprend que les $s-n+1$ premières lettres de la suite (1) en question; il s'ensuit qu'on a l'identité

$$a_n s = \left(a_n s\right)_{1,\ s-n+1},$$

1 et $s-n+1$ désignant les limites, entre lesquelles cette suite (1) est prise. Donc, en employant la même notation pour le nombre partitif correspondant, on aura

$$n_s = \left(n_s \right)_{1,\, s-n+1}.$$

Il est évident que le nombre partitif n_s reste le même, lorsqu'on augmente les indices de toutes les lettres de la partition $a_n s$ de α unités, de sorte que la somme et les limites de la suite (1) devenant respectivement

$$s + n\alpha,\ \alpha + 1,\ s - n + \alpha + 1;$$

on a l'identité

$$n_s = \left(n_{s+n\alpha} \right)_{\alpha+1,\ s-n+\alpha+1}.$$

25. *Partition* $a_1 s$. Comme il a été dit, n° 24, la partition $a_1 s$ ne comprend qu'un seul terme a_s, de sorte qu'on a

$$a_1 s = a_s,\ 1_s = 1.$$

Ainsi, en écrivant 1 plusieurs fois de suite, on aura les nombres 1_s, correspondants aux indices 1, 2, 3,... savoir :

Indices :	1,	2,	3,	4,	5,	6,...
nombres 1_s :	1,	1,	1,	1,	1,	1,...

26. *Partition* $a_2 s$. Ecrivons les $s - 1$ lettres de la suite (1), savoir :

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots\ a_{s-1}$$

et multiplions, par elles-mêmes, les lettres extrêmes et celles qui se trouvent à égale distance des extrêmes ; il est évident que nous aurons tous les arrangements de la partition proposée, pourvu que nous ayons soin de multiplier par elle-même la lettre du milieu, s'il y en a, savoir :

$$a_2 s = a_1 a_{s-1} + a_2 a_{s-2} + a_3 a_{s-3} + \ldots .$$

Chaque terme de cette suite se tire de celui qui le précède, en augmentant l'indice de la première et en diminuant celui de la seconde des lettres d'une unité.

Remarques. I. Il résulte de cette formation que deux nombres partitifs, tels que 2_{2s}, 2_{2s+1} sont égaux, savoir

$$2_{2s} = s, \qquad 2_{2s+1} = s.$$

II. La génération des nombres 2_s peut s'obtenir en écrivant, sous elle-même, la ligne des nombres 1_s de manière que chaque ligne soit avancée de deux rangs de plus que la précédente, et en ajoutant par colonnes, savoir :

Indices :	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	....
	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	....
			1,	1,	1,	1,	1,	....
					1,	1,	1,	....
							1,	....
	.	.	.	.	.	.	.	
Nombres 2_s :	1,	1,	2,	2,	3,	3,	4,	....

Comme la seconde ligne et les suivantes, ajoutées par colonnes, donnent les nombres 2_s dont le rang est des deux unités moindre ; on a

$$2_s = 1_{s-1} + 2_{s-2} \quad .$$

III. D'après cette loi des nombres 2_s, on aura

$$2_s = 1_{s-1} + 1_{s-3} + 1_{s-5} + \ldots$$

$$2_{s-1} = 1_{s-2} + 1_{s-4} + 1_{s-6} + \ldots$$

En ajoutant, il viendra

$$2_s + 2_{s-1} = S.\ 1_{s-1},$$

la caractéristique S étant employée pour désigner la somme d'une suite continue, telle que

$$1_{s-1} + 1_{s-2} + 1_{s-3} + \ldots + 1_0 ,$$

prise depuis $s = s$, jusqu'à $s = 1$.

27. *Partition* $a_2 s$. Multiplions la partition

$$a_2 s = a_1 a_{s-1} + a_2 a_{s-2} + a^3 a_{s-3} + \ldots$$

à partir du second, troisième, ... terme par a_1, a_2, a_3, ... en ayant soin de diminuer l'indice de la dernière lettre d'une unité, de manière que la somme des indices soit toujours égale à s, et en continuant de la sorte jusqu'à ce que l'indice de la seconde soit moindre d'une unité ou, au plus, égal à celui de la troisième lettre ; nous formerons évidemment la partition $a_3 s$, savoir :

$$\begin{aligned} a_3 s = & \left(a_1 a_{s-2} + a_2 a_{s-3} + a_3 a_{s-4} + \ldots \right) + \\ & a_2 \left(a_2 a_{s-4} + a_3 a_{s-5} + a_4 a_{s-6} + \ldots \right) + \\ & a_3 \left(a_3 a_{-s 6} + a_4 a_{s-7} + a_5 a_{s-8} + \ldots \right) + \ldots \end{aligned}$$

Pour trouver le nombre partitif correspondant, observons que la première ligne, abstraction faite du facteur commun a_1, n'est autre chose, d'après le n° 24, que la partition $(a_2 s-1)_{1,s-2}$ dont le nombre partitif correspondant est

$$\left(2_{s-1} \right)_{1,s-2} = \left(2_{s-1} \right)_{1,s-1} = 2_{s-1} ;$$

que la seconde ligne est la partition $(a_2 s - 4)_{2,s-4}$ dont le nombre partitif, d'après le même n° 24, est

$$\left(2_{s-2} \right)_{2.s-4} = \left(2_{s-4} \right)_{1,s-3.} = 2_{s-4} ;$$

que la troisième ligne est la partition $(a_2 s - 6)_{3,\,s-6}$ dont le nombre partitif est

$$\left(2_{s-3}\right)_{3,\,s-6} = \left(2_{s-7}\right)_{1,\,s-7} = 2_{s-7} \quad ;$$

et ainsi des autres. Donc,

$$3_s = 2_{s-1} + 2_{s-4} + 2_{s-7} + \cdots$$

Or, pour la même raison, on a

$$3_{s-3} = 2_{s-4} + 2_{s-7} + 2_{s-10} + \cdots$$

et par conséquent

$$3_s = 2_{s-1} + 3_{s-3}\,.$$

Remarques I. D'après cette loi, on peut obtenir les nombres 3_s, en écrivant, sous elle-même, plusieurs fois de suite la ligne des nombres 2_s, de manière que chaque ligne soit de trois rangs plus avancée que la précédente, et en ajoutant par colonnes, savoir

Indices:	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	....
	1,	1,	2,	2,	3,	3,	4,	....
				1,	1,	2,	2,	....
							1,	....
				.	.	.	.	.
3_s:	1,	1,	2,	3,	4,	5,	7,	....

II. Cette formation revient encore à partager le nombre 2_s, en tranches de trois nombres et replier, sous elles-mêmes, ces tranches en trois colonnes En ajoutant les nombres ainsi disposés par colonnes de maniere qu'on y emploie successivement une, deux, trois, ... lignes, on aura les nombres 3_s, comme il suit :

nombres 2.			indices			nombres 3.		
1,	1,	2,	3,	4,	5,	1,	1,	2
2,	3,	3,	6,	7,	8,	3,	4,	5
4,	4,	5,	9,	10,	11,	7,	8,	10
5,	6,	6,	12,	13,	14,	12,	14,	16
7,	7,	8.	15,	16,	17,	19,	21,	24
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

III. On voit, d'après la loi fondamentale des nombres 3_s, qu'il suffit de connaître les nombres 2_s et les trois premiers des 3_s, pour pouvoir en déduire tous les autres, comme il suit :

indices:	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	...
2_s:	1,	2,	2,	3,	3,	4,	4,	...
3_s	1,	1,	2,	3,	4,	5,	7,	...

Les lignes tirées de 1 à 2 et de 2 à 3 indiquent qu'il faut ajouter 1 à 2 pour avoir 3 ; de même 2 à 3 pour avoir 5, etc.

IV. Cherchons maintenant le terme général des nombres 3_s. D'après la loi fondamentale de ces nombres, on aura

$$3_{2s} = 2_{2(s-1)+1} + 3_{2(s-1)-1},$$

$$3_{2(s-1)-1} = 2_{2(s-1)} + 3_{2(s-3)}.$$

Ajoutant, il vient

$$3_{2s} = 2_{2(s-1)+1} + 2_{2(s-1)} + 3_{2(s-3)};$$

et par conséquent, d'après le n° 26,

$$3_{2s} = 2s - 2 + 3_{2(s-3)}$$

Changeons s en $3s$, $3s+1$, $3s+2$, nous aurons

$$\mathfrak{Z}_{6s} = 6s - 2 + \mathfrak{Z}_{6(s-1)} \, ,$$

$$\mathfrak{Z}_{6s+2} = 6s + \mathfrak{Z}_{6(s-1)+2} \, ,$$

$$\mathfrak{Z}_{6s\,4} = 6s + 2 + \mathfrak{Z}_{6(s-1)+4} \, .$$

Comme les nombres $\mathfrak{Z}_s$ ne commencent que lorsque $s=3$, on a $\mathfrak{Z}_0 = 0$, $\mathfrak{Z}_1 = 0$, $\mathfrak{Z}_2 = 0$, $\mathfrak{Z}_3 = 1$, etc. Donc, les nombres $\mathfrak{Z}_{6s}$, $\mathfrak{Z}_{6s+2}$, $\mathfrak{Z}_{6s+4}$ ne peuvent être respectivement que de la forme

$$As^2 + Bs, \; As^2 + Bs, \; As^2 + Bs + 1,$$

pour qu'en y fesant $s=0$, on puisse retrouver $\mathfrak{Z}_0 = 0$, $\mathfrak{Z}_2 = 0$, $\mathfrak{Z}_4 = 1$. Cela posé, nous aurons

$$As^2 + Bs = 6s - 2 + A(s-1)^2 + B(s-1),$$

$$As^2 + Bs = 6s + A(s-1)^2 + B(s-1),$$

$$As^2 + Bs + 1 = 6s + 2 + A(s-1^2) + B(s-1) + 1$$

les identités, desquels on déduira A et B, pour chaque cas des nombres $\mathfrak{Z}_s$, savoir : $\mathfrak{Z}_{6s}$, $\mathfrak{Z}_{6s+2}$, $\mathfrak{Z}_{6s+4}$. On aura ainsi

$$\mathfrak{Z}_{6s} = 3s^2, \; \mathfrak{Z}_{6s+2} = 3s^2 + 2s, \; \mathfrak{Z}_{6s+4} = 3s^2 + 3s + 1.$$

De la même manière on déterminera les nombres suivants :

$$\mathfrak{Z}_{6s+1} = 3s^2 + s, \; \mathfrak{Z}_{6s+3} = 3s^2 + 3s + 1, \; \mathfrak{Z}_{6s+5} = 3s^2 + 5s + 1$$

D'où résulte le tableau suivant pour former tous les nombres $\mathfrak{Z}_s$, savoir :

$$3_{6s} = 3s^2,$$

$$3_{6s+1} = 3s^2 + s,$$

$$3_{6s+2} = 3s^2 + 2s,$$

$$3_{6s+3} = 3s^2 + 3s + 1,$$

$$3_{6s+4} = 3s^2 + 4s + 1,$$

$$3_{6s+5} = 3s^2 + 5s + 2;$$

généralement

$$3_{6s=r} = 3s^2 + rs + 3_r.$$

V. On peut écrire cette dernière formule de la manière suivante :

$$3_{6s+r} = \frac{1}{12}\left\{(6s+r)^2 - r^2\right\} + 3_r;$$

d'où il résulte que si s est un nombre quelconque et r le reste de la division de ce nombre par 6 on a

$$3_s = \frac{1}{12}\left\{s^2 - r^2\right\} + 3_r.$$

VI. Changeant s en $s-1$, dans les six formules des nombres 3, il viendra

$$3_{6s-1} = 3s^2 - s,$$

$$3_{6s-2} = 3s^2 - s^2,$$

$$3_{6s-3} = 3s^2 - s_3 + 1,$$

$$3_{6s-4} = 3s^2 - 4s + 1,$$

$$3_{6s-5} = 3s^2 - 5s + 2;$$

donc, généralement

$$3_{6s-r} = 3s^2 - rs + 3_r .$$

Or, si dans la formule générale des nombres 3, on change r en $-r$, il vient

$$3_{6s-r} = 3s^2 - rs + 3_{-r} :$$

donc, en comparant ces deux derniers résultats, on trouve

$$3_r = 3_{-r} .$$

VII. D'après la loi fondamentale des nombres 3_s, on a

$$3_s = 2_{s-1} + 2_{s-4} + 2_{s-7} + \cdots,$$
$$3_{s-1} = 2_{s-2} + 2_{s-5} + 2_{s-8} + \cdots,$$
$$3_{s-2} = 2_{s-3} + 2_{s-6} + 2_{s-9} + \cdots,$$

ajoutant, il vient

$$3_s + 3_{s-1} + 3_{s-2} = \mathrm{S}.\,2_{s-1}$$

la caractéristique S étant employée pour désigner la somme de $s-1$ nombres 2_s, savoir :

$$\mathrm{S}.\,2_{s-1} = 2_{s-1} + 2_{s-2} + 2_{s-3} + \cdots .$$

VIII. En prenant la dérivée par rapport à s des deux membres de l'équation

$$3_{6s+r} = 3s^2 + rs + 3_r$$

on trouve

$$\frac{d}{ds}\left(3_{6s+r}\right) = 6s + r,$$

c'est-à-dire l'indice du nombre 3_{6s+r}.

28. *Partition* $a_4 s$. Multiplions la partition $a_3 s$, à partir de la première, seconde, troisième, etc., ligne, comme il est marqué n° 27, par a_1, a_2 a_3,... en ayant soin de diminuer l'indice de la dernière des quatre lettres de manière à avoir toujours la somme des indices égale à s et de continuer toujours de la sorte jusqu'à ce que l'indice de l'avant-dernière lettre soit moindre d'une unité ou au plus égal à celui de la dernière; nous aurons évidemment la partition $a_4 s$, savoir :

$$\begin{aligned}
a_4 s = a_1 \Big\{ & a_1 a_1 a_{s-3} + a_1 a_2 a_{s-4} + a_1 a_3 a_{s-5} + \ldots \\
& a_2 a_2 a_{s-5} + a_2 a_3 a_{s-6} + a_2 a_7 a_{s-7} + \ldots \\
& a_3 a_3 a_{s-7} + a_3 a_4 a_{s-8} + a_3 a_5 a_{s-9} + \ldots \\
& \ldots\ldots\ldots \Big\} + \\
a_2 \Big\{ & a_2 a_2 a_{s-6} + a_2 a_3 a_{s-7} + a_2 a_4 a_{s-8} + \ldots \\
& a_3 a_3 a_{s-8} + a_3 a_4 a_{s-8} + \ldots \\
& \ldots\ldots \Big\} + \\
a_3 \Big\{ & a_3 a_3 a_{s-9} + \ldots \\
& \ldots\ldots \Big\} + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Le nombre partitif correspondant sera la somme des termes, contenus dans des groupes ayant respectivement a_1, a_2, a_3, ... pour facteur commun, que nous avons mis en évidence devant $\Big\{ \quad \Big\}$. Le groupe ayant a_1 pour facteur commun n'est autre chose, abstraction faite de ce facteur, que la partition $(a_3.s-1)$, dont le nombre partitif est 3_{s-1}. Le groupe ayant a_2 pour facteur commun, abstraction faite de ce facteur, n'est autre chose que la partition $(a_3 s-2)_{2,\,s-6}$, dont le nombre partitif correspondant, d'après n° 24, est

$$\left(3_{s-2}\right)_{2,s-6}=\left(3_{s-5}\right)_{1,s-7}=\left(3_{s-5}\right)_{1,s-5}=3_{s-5}.$$

De même le groupe ayant a_3 pour facteur commun, abstraction faite de ce facteur, n'est autre chose que la partition $(a_3 s-3)_{3,s-9}$, dont le nombre partitif correspondant, d'après le n° 24, est

$$\left(3_{s-3}\right)_{3,s-9}=\left(3_{s-9}\right)_{1,s-11}=\left(3_{s-9}\right)_{1,s-9}=3_{s-9}.$$

Donc, en raisonnant de la même manière pour les groupes suivants, ayant a_4, a_5,.... pour facteurs communs, on trouvera

$$4_s=3_{s-1}+3_{s-5}+3_{s-9}+3_{s-13}+\dots$$

En changeant s en $s-4$, on a

$$4_{s-4}=3_{s-5}+3_{s-9}+3_{s-13}+3_{s-17}+\dots$$

et par conséquent

$$4_s=3_{s-1}+4_{s-4}.$$

I. Cette loi donne le moyen de construire des nombres 4_s. Pour cet effet, on écrira la ligne des nombres 3_s, plusieurs fois sous elle-même, de manière que chaque ligne soit de quatre rangs plus avancée que la précédente : en ajoutant par colonnes, on aura les nombres 4_s, savoir :

Indices:	4,	5,	6,	7,	8,	9,	....
	1,	1,	2,	3,	4,	5,	....
					1,	1,	....
	.	.	.	.	.	.	
4_s:	1,	1,	2,	3,	5,	6,	....

II. On peut obtenir les mêmes nombres 4_s, en partageant les nombres 3_s, en tranches de quatre nombres, et en écrivant ces

tranches en colonnes. Les sommes des nombres, contenus dans des colonnes, ayant un même nombre des lignes, seront les nombres 4_s.

Voici d'ailleurs le calcul.

nombres 3_s	indices	nombres 4_s
1, 1, 2, 3,	4, 5, 6, 7,	1, 1, 2, 3,
4, 5, 7, 8,	8, 9, 10, 11,	5, 6, 9, 11,
10, 12, 14, 16,	12, 13, 14, 15,	15, 18, 23, 27,
. . . .	. . . .	. . . .

III. La loi de formation des nombres 4_s donne encore le moyen suivant de les obtenir.

indices:	4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...
3_s:	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, ...
4_s:	1, 1, 2, 3, 5, 6, 9,

Les lignes tirées de 2 à 7 et de 7 à 9 indiquent qu'il faut ajouter 2 à 7 pour avoir 9; et ainsi des autres.

IV. Cherchons maintenant le terme général des nombres 4_s.

D'après la loi de formation de ces nombres, on a

$$4_s = 3_{s-1} + 4_{s-4} \,.$$

Remplaçant s par $6s + 2p$, il vient

$$4_{6s+2p} = 3_{6s+2p-1} + 4_{6s+2p-4} \,,$$
$$4_{6s+2p-4} = 3_{6s+2p-5} + 4_{6s+2p-8} \,,$$
$$4_{6s+2p-8} = 3_{6s+2p-9} + 4_{6s+2p-12} \,.$$

Ajoutant,

$$4_{6s+2p} = 3_{6s+2p-1} + 3_{6(s-1)+2p+1} + 3_{6(s-2)+2p+3} + 4_{6(s-2)+2p} \,.$$

Changeons s en $2s$ dans cette égalité ; nous aurons :

$$(1)\ldots . 4_{12s+2p} = 3_{12s+2p-1} + 3_{6(2s-1)+2p+1} + \\ + 3_{6(2s-2)+2p+3} + 4_{12(s-1)+2p}.$$

Cette dernière égalité fait présumer que la forme générale des nombres 4_0, dont le rang est $12s + 2p$ est la suivante :

$$4_{12s+2p} = As^3 + (Bp + 6)s^2 + (Dp^2 + Ep + E)s + 4_{2p} \ldots . (a)$$

Remplaçons, dans cette dernière égalité, p par $6p$ et s par $-s$; le premier membre donnera $4_0 = 0$, et le second en y changeant p en s :

$$4_{12s} = (A - 6B + 36D)s^3 + (6E - C)s^2 + Fs,$$

expression identique avec (a) lorsqu'on y fait $p = 0$, savoir :

$$4_{12s} = As^3 + Cs^2 + Fs \ldots . (b).$$

En comparant les coëfficients de mêmes puissances de s, dans ces deux identités, on trouve

$$B = 6D, C = 3E, F = F. \qquad (c)$$

Par là, l'expression (a) se change en la suivante :

$$4_{12s+2p} + As^3 + (6Dp + 3E)s^2 + (Dp^2 + Ep + F)s + 4_{2p}. \ (d).$$

Or, d'après la formule (1), ci-dessus, on a :

$$4_{12(s+1)} = 4_{12s} + 3_{6(2s+1)+5} + 3_{6(2s+1)+1} + 3_{6(2s)+3} \\ = As^3 + Cs^2 + Fs + 3(2s+1)^2 + 5(2s+1) + 2 + \\ + 3(2s+1)^2 + (2s+1) + 3(2s)^2 + 3(2s) + 1 \\ = As^3 + (C+36)s^2 + (F+42)s + 15.$$

Au même résultat on doit parvenir en changeant s en $s+1$, dans (b), savoir :

$$4_{12(s+1)} = As^3 + (3A + C)s^2 + (3A + 2C + F)s + A + C + F.$$

Donc, en comparant les coëfficients de mêmes puissances de s, dans ces deux dernières identités, il viendra :

$$\left.\begin{array}{l} A = A, \\ 3A = 36, \\ 3A + 2C = 42, \\ A + C + F = 15. \end{array}\right\} \text{d'où} \quad \begin{array}{l} A = 12, \\ C = 3, \\ F = 0. \end{array}$$

Ces résultats joints à ceux en (c) permettent de donner à la formule (b) l'expression suivante :

$$4_{12s+2p} = 12s^3 + 3(2Dp + 1)s^2 + (Dp^2 + p) + 4_{2p} \quad \ldots (e)$$

Posons, dans cette dernière égalité, $p = 2$; nous aurons

$$4_{12s+4} = 12s + 3(4D + 1)s^2 + 2(2D + 1)s + 1;$$

à cause de $4_4 = 1$. Or, d'autre part, d'après la loi fondamentale des nombres 4_s, on a

$$4_{12s+4} = 3_{6(2s)+3} + 4_{12s} = 3(2s)^2 + 3(2s)^2 + 1 + 12s^3 + 3s^2$$

ou bien

$$4_{12s+4} = 12s^3 + 15s^2 + 6s + 1.$$

En comparant, dans ces dernières identités, les coëfficients des mêmes puissances de s, on trouvera $D = 1$; c'est ce qui change l'expression (e) en la suivante :

$$4_{12s+2p} = 12s^3 + 3(2p + 1)s^2 + p(p + 1)s + 4_{2p}.$$

On trouve de même

$$4_{12s+2p+1} = 12s^3 + 6(p + 1)s^2 + p(p + 2)s + 4_{2p+1}.$$

IV. Une manière plus rationnelle de trouver ces deux formules est la suivante :

Comme les nombres 4_s sont des polynomes algébriques du troisième degré, posons

$$4_s = As^3 + Bs^2 + Cs + D.$$

Si r est l'accroissement de s, on aura d'après la formule de Taylor,

$$4_{s+r} = 4_r + (3Ar^2 + 2Br + C)s + (3Ar + B)s^2 + As^3 \ldots . \quad (f).$$

Posons maintenant $s = 12$, et remplaçons r par $6r$, il viendra

$$4_{6r+12} - 4_{6r} = 36^2 . Ar^2 + (24B + 3.12^2 A) 6r$$
$$+ A.12^3 + B.12^2 + C.12.$$

Or, on a aussi

$$4_{6r+12} - 4_{6r} = 3_{6r+11} + 3_{6r+7} + 3_{6r+3} = 9r^2 + 21r + 15.$$

En comparant les coëfficients de mêmes puissances de r, dans ces deux identités, on aura :

$$36^2 . A = 9,$$
$$(24B + 3.12^2 A)6 = 21,$$
$$A.12^3 + B.12^2 + C.12 = 15.$$

d'où l'on tire

$$144A = 1, \ 144B = 3, \ C = 0.$$

En remplaçant, dans la formule (f), s par $12s$ et r par $2r$, on trouvera

$$(g) \ldots 4_{12s+2r} = 4_{2r} + r(r+1)s + 3(2r+1)s^2 + 12s^3.$$

Posons $s = 12$, $r = 6r - 1$, dans (f), nous aurons

$$4_{6r+11} - 4_{6r-1} = \left\{ 3A(6r-1)^2 + 2B(6r-1) + C \right\} s +$$
$$\left\{ 3A(6r-1) + B \right\} s^2 + As^3.$$

$$= 36^2 . Ar^2 \begin{matrix} -3.12^2 A \\ +12^2 B \\ +18.12^2 A \end{matrix} \left\} \begin{matrix} r + (3A - 2B + C)12 \\ + (B - 3A)12^2 + A.12^3 \end{matrix} \right.$$

expression qui doit être identique avec cette autre :

$$4_{6r+11} - 4_{6r-1} = 3_{6r+10} + 3_{6r+6} + 3_{6r+2} = 9r^2 + 18r + 11.$$

En comparant les coëfficients de mêmes puissances de r dans ces identités, on trouve

$$144\,A = 1,\ 144\,B = 3,\ 144\,C = -9.$$

Ainsi, en remplaçant s par $12s$ et r par $2r+1$, dans (f) on trouve

$$(h) \ldots\ 4_{12s+2r+1} = 4_{2r+1} + r(r+2)s + 6(r+1)s^2 + 12s^3.$$

V. Les formules (g) et (h) donnent les douze formules suivantes, au moyen desquelles on calculera tous les nombres 4_s, savoir :

$$
\begin{aligned}
(i) \ldots\ 4_{12s} &= 12s^3 + 3s^2, \\
4_{12s+1} &= 12s^3 + 6s^2, \\
4_{12s+2} &= 12s^3 + 9s^2 + 2s, \\
4_{12s+3} &= 12s^3 + 12s^2 + 3s, \\
4_{12s+4} &= 12s^3 + 15s^2 + 6s + 1, \\
4_{12s+5} &= 12s^3 + 18s^2 + 8s + 1, \\
4_{12s+6} &= 12s^3 + 21s^2 + 12s + 2, \\
4_{12s+7} &= 12s^3 + 24s^2 + 15s + 3, \\
4_{12s+8} &= 12s^3 + 27s^2 + 20s + 5, \\
4_{12s+9} &= 12s^3 + 30s^2 + 24s + 6, \\
4_{12s+10} &= 12s^3 + 33s^2 + 30s + 9, \\
4_{12s+11} &= 12s^3 + 36s^2 + 34s + 11.
\end{aligned}
$$

VI. En prenant deux nombres 4_s et 4_r, dont les indices divisés par 12 donnent le même reste, on peut exprimer les formules (g) et (h) de la manière suivante :

$$(k)\quad \left\{\begin{aligned} 4_s &= \frac{1}{144}\left\{s^3 + 3s^2 - 9s - r^3 - 3r^2 + 9r\right\} + 4_r, \\ 4_s &= \frac{1}{144}\left\{s^3 + 3s^2 - r^3 - 3r^2\right\} + 4r \end{aligned}\right.$$

VII. En changeant s en $s - 1$, dans les douze formules (i), on trouve

$$(l) \ldots \quad \begin{aligned}
4_{12s-1} &= 12s^3 + 0.\,s^2 - s, \\
4_{12s-2} &= 12s^3 - 3.s^2, \\
4_{12s-3} &= 12s^3 - 6s^2, \\
4_{12s-4} &= 12s^3 - 9s^2 + 2s, \\
4_{12s-5} &= 12s^3 - 12s^2 + 3s, \\
4_{12s-6} &= 12s^3 - 15s^2 + 6s - 1, \\
4_{12s-7} &= 12s^3 - 18s^2 + 8s - 1, \\
4_{12s-8} &= 12s^3 - 21s^2 + 12s - 2, \\
4_{12s-9} &= 12s^3 - 24s^2 + 15s - 3, \\
4_{12s-10} &= 12s^2 - 27s^3 + 20s - 5, \\
\text{etc.}, &\qquad \text{etc.},
\end{aligned}$$

VIII. Le rapprochement des formules (i) et (l) fournit les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
4_{12s-2} &= -\left(4_{-12s}\right), \\
4_{12s-3} &= -\left(4_{-12s+1}\right), \\
4_{12s-4} &= -\left(4_{-12s+2}\right), \\
\text{etc.} &\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$4_{12s-r} = -\left(4_{-12s+r-2}\right),$$

$$4_{-r} = -\left(4_{r-2}\right).$$

Donc, en changeant r en $-r$ dans les formules (g) et (h), on aura

$$4_{12s-r} = 12s^3 - 3(2r-1)s^2 + r(r-1)s - 4_{2r-2},$$

$$4_{12s-2r+1} = 12s^3 - 6(r-1)s^2 + r(r-2)s - 4_{2r-1}.$$

IX. D'après la loi fondamentale des nombres 4_s, on a

$$4_s = 3_{s-1} + 3_{s-5} + 3_{s-9} + \cdots$$

$$4_{s-1} = 3_{s-2} + 3_{s-6} + 3_{s-10} + \cdots$$

$$4_{s-2} = 3_{s-3} + 3_{s-7} + 3_{s-11} + \cdots$$

$$4_{s-3} = 3_{s-4} + 3_{s-8} + 3_{s-12} + \cdots$$

En ajoutant il vient

$$4_s + 4_{s-1} + 4_{s-2} + 4_{s-3} = \text{S}.\,3_{s-1},$$

la caractéristique S étant employée pour désigner la suite

$$3_{s-1} + 3_{s-2} + 3_{s-3} + \cdots.$$

prise depuis s, jusqu'à $s = 1$.

Nota. La suite de la partition sera donnée dans un des Nos suivants ; et l on commencera immédiatement par la méthode de Newton.

XVI. *Théorie de l'équilibre de la vis à filet triangulaire, eu égard au frottement.* (*Extrait d'un travail plus étendu.*)

Par M. STEICHEN.

Professeur à l'École Militaire de Bruxelles.

Nous nous proposons dans cette dissertation d'éclaircir quelques difficultés que semblent présenter les conditions d'équilibre de la vis triangulaire, quand on a égard au frottement. A cet effet nous donnerons la solution de la question pour un cas du moins, en suivant une marche analogue à celle de Navier dans ses applications de mécanique ; nous ferons ainsi amené naturellement à y signaler quelques résultats contradictoires, que nous tâcherons d'expliquer. Ensuite nous passerons en revue le travail de M. Poncelet sur la même matière, pour soumettre à des épreuves particulières et à toutes les vérifications possibles nos propres idées et celles de la théorie ordinaire, que nous n'admettons pas sans restriction.

§ I. Nommons d'après Navier :

α l'angle que forme avec l'horizon la tangente à l'hélice moyenne, tracée sur la surface rampante d'une vis à filet triangulaire, à axe vertical, γ le rayon de la surface cylindrique sur laquelle serpente cette hélice moyenne.

B l'inclinaison à l'horizon de la génératrice rectiligne de la surface hélicoïde du noyau et de l'écrou, sur laquelle porte la charge, placée sur l'axe de la vis; a, b, c les trois angles de la normale en un point donné M de cette surface avec trois axes rectangles qui se coupent en ce point : ces axes eux-mêmes seront Mx, My, Mz ; le premier est dirigé suivant le prolongement du rayon horizontal γ qui passe par M : le second My est également horizontal, et tangent à la surface du cylindre ; le troisième Mz sera donc vertical.

Nous raisonnerons d'abord pour le cas d'une seule puissance P, et nous laisserons de côté le frottement qui provient de ce que l'axe même de la vis tend à se déplacer par l'effet de la puissance, parce

que là n'est pas maintenant la difficulté, ni le sujet en contestation : ainsi nous aurons seulement à tenir compte du frottement de la surface de la vis sur celle de l'écrou, censée absolument fixe, et d'un frottement latéral qui pourra avoir ou n'avoir pas lieu, selon les différents cas, et qui est dû à une force agissant dans le plan tangent à la surface rampante. Nous admettrons aussi, pour commencer, avec Navier et M. Poncelet, que l'effort exercé par la puissance et la charge sur la surface fixe de l'écrou soit concentré en un seul point M de cette surface, et c'est en ce point qu'il faudra concevoir le plan tangent ; ce sera un des points de l'hélice moyenne.

En observant maintenant d'après le premier auteur cité que la normale à la surface au point, normale qu'on nommera ici Mv, est perpendiculaire à la fois à l'hélice moyenne et à la génératrice rectiligne de la surface en ce point, on trouvera sans peine :

$$\cos a = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha+\operatorname{tang}^2\beta}},\ \cos b = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\sqrt{\ldots}},\ \cos c = \frac{1}{\sqrt{\ldots}}$$

Comme la quantité $\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha+\operatorname{tang}^2\beta}$ se reproduit souvent dans nos formules, nous adopterons une notation abréviative, en posant :

$$\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha+\operatorname{tang}^2\beta} = w.$$

Ce qui donnera plus simplement :

$$\cos c = \frac{1}{w},\ \cos b = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{w},\ \cos a = \frac{\operatorname{tang}\beta}{w}\ \ldots\ (1).$$

Mais si l'on appliquait en M, considéré comme un point appartenant au noyau de la vis une force Z capable d'équilibrer la puissance P, censée pourvue d'un bras de levier r', autour de l'axe de la vis, on aurait :

$$Z.\,r = P.\,r' \text{ ou } Z = P.\,\frac{r'}{r}\ \ldots\ldots\ (2)$$

Ainsi l'effort exercé horizontalement au point M par la force P est $P.\,\frac{r'}{r}$, tandis que l'effort exercé verticalement contre le même point

de l'écrou est la charge $\underset{\sim}{Q}$ elle-même : Nommons Mf la tangente à l'hélice en M, située dans le plan tangent, et Md la ligne de ce plan, normale à Mf : en décomposant chacun de ces efforts suivant les droites VM, Mf, Md, nous aurons :

1° Suivant la normale VM un effort N, donné par l'égalité :

$$N = \frac{Z.\ \text{tang}\,\alpha + Q}{w} \ldots (3).$$

2° Suivant la ligne fM un effort N′ :

$$N' = Z \cos\alpha - \underset{\sim}{Q} \sin\alpha \ldots (4).$$

3° Suivant la ligne Md un effort N″ :

$$N'' = \sqrt{Z^2 + \underset{\sim}{Q}^2 - N^2 - N'^2}$$

Les quantités N, N′, N″ étant une fois trouvées, il ne sera pas difficile d'établir l'équation d'équilibre, en tenant compte du frottement, dû à la pression normale N, et à la force N″ qui tend à pousser latéralement la vis contre la surface de l'écrou fixe. Pour mieux faire comprendre notre idée à cet égard, supposons qu'il y ait un faible jeu entre les deux pièces : alors la force N″, si elle est suffisante, fera glisser la vis avec son axe, un tant soit peu mobile, sur la surface de l'écrou, et pressera par conséquent le filet saillant contre le filet extrême de l'écrou ; c'est ce qui produira ce frottement particulier que nous nommerons pour abréger *frottement latéral.*

Toutefois il faut observer que cette espèce de résistance n'existe pas, dès que l'effort N″ est moindre ou au plus égal au frottement entre les deux surfaces rampantes : car cette inéquation de condition étant remplie, les filets extrêmes glisseront l'un sur l'autre sans aucune pression latérale. Ainsi dans les vis triangulaires, soumises dans leur construction à l'inéquation de condition

$$N'' = \text{ou} < fN \ldots (5).$$

où f marque le coëfficient du frottement des deux surfaces rampantes, glissant l'une sur l'autre, on aura une résistance passive de moins à vaincre que dans les vis qui ne satisfont pas à cette inégalité.

§ 2. Sans nous arrêter au développement de l'inégalité (5), sur laquelle on reviendra plus tard, reprenons les choses par la pression normale, et examinons si en effet la valeur de N de l'équation (3) est exacte; cet examen est d'autant plus nécessaire que l'on a été conduit récemment à en suspecter l'exactitude, d'après les calculs de MM. Persy et Poncelet, parce qu'en suivant un autre mode de décomposition des forces, on est parvenu en effet à une pression normale différente :

Pour montrer cette diversité de résultats, nous décomposerons d'après Navier lui-même, d'abord la force $P\frac{r'}{r}$ et Q suivant la tangente à l'hélice, et suivant la perpendiculaire à la tangente dans le plan tangent au cylindre. La somme des composantes suivant la ligne fM sera encore $Z\cos\alpha - Q\sin\alpha$, et la somme des secondes composantes suivant une ligne Md', normale à Mf, mais située comme cette dernière, dans le plan tangent au cylindre, aura une valeur P', donnée par l'équation :

$$P' = Z.\sin\alpha + Q.\cos\alpha \ldots\ldots (6).$$

Or la ligne Md' et la force P' se trouvent comprises dans le plan que déterminent les lignes r et MV : De plus la force P' étant située dans le plan tangent au cylindre de rayon r, plan qui est perpendiculaire à r, fera avec la normale un angle complémentaire de a : ainsi la composante de P' suivant la ligne VM aura la valeur $N_{\prime}$, donnée par l'équation suivante :

$$N_{\prime} = \frac{P'}{\sin a} = \frac{Z.\sin\alpha + Q\cos\alpha}{\sin a} \ldots\ldots (7).$$

et sa composante suivant le prolongement du rayon horizontal r sera :

$$N_{\prime\prime} = P'\frac{\cos a}{\sin a} = \frac{P'}{\operatorname{tang} a} \ldots\ldots (8).$$

Si l'on remarque maintenant qu'en vertu des équations (1) on obtient $\sin a = \frac{1}{w\cos\alpha}$, et qu'on substitue les valeurs de $\sin a$, $\cos a$, dans les équations (7) et (8), on obtiendra :

$$\left.\begin{aligned} N_{\prime} &= \left(P\frac{r'}{r}\sin\alpha + Q\cos\alpha \right).W.\cos\alpha \ldots (9) \\ N_{\prime\prime} &= \left(P\frac{r'}{r}\sin\alpha + Q\cos\alpha \right).\cos\alpha.\operatorname{tang}\beta \ldots (10). \end{aligned}\right\}$$

En comparant les valeurs des quantités $N_{\prime}$, $N_{\prime\prime}$, calculées d'après ce dernier mode de décomposition avec celles de la première méthode, on s'aperçoit qu'elles ne sont pas égales entr'elles; et cependant Navier, qui ne signale pas cette contradiction dans les formules, considère bien la quantité $N_{\prime}$ comme exprimant la pression normale exercée sur la surface fixe, puisqu'il pose l'équation d'équilibre :

$$P.\frac{r'}{r}\cos\alpha - Q.\sin\alpha - f.N_{\prime} = 0 \ldots$$

Cette équation suppose évidemment que le frottement soit dû à une pression $N_{\prime}$. Mais il y a ici une erreur qui ne provient pas, contrairement à l'opinion de Mrs Poncelet, et Persy, d'une fausse décomposition de forces, mais qui consiste uniquement, croyons-nous, à admettre la quantité $N_{\prime}$ comme étant la valeur exacte de la pression normale : En effet la force $N_{\prime\prime}$, dirigée suivant r prolongé, n'étant pas située dans le plan tangent (Mf, Md) doit de nouveau se décomposer suivant les directions le long desquelles elle peut être détruite, c'est-à-dire, suivant la normale MV, et suivant la droite d'intersection du plan tangent avec le plan projetant, renfermant $N_{\prime\prime}$ et la ligne MV ; et cette droite d'intersection coïncide évidemment avec la droite Md : or suivant la normale MV la composante de $N_{\prime\prime}$ est $N_{\prime\prime}\cos a$, et suivant Md on aura la composante $N_{\prime\prime}\sin a$. Si donc on observe que la force $N_{\prime}$ agit suivant la ligne VM, tandis que la force $N_{\prime\prime}\cos a$ agit en sens contraire, on aura pour la pression normale véritable :

$$N_{\prime} - N_{\prime\prime}\cos a = P'\left(\frac{I}{\sin a} - \cos\alpha.\operatorname{tang}\beta.\cos a\right) = \frac{Z.\operatorname{tang}\alpha + Q}{w}$$

ce qui est précisément la pression normale qu'on a obtenue par le premier mode de décomposition. Il suit de-là que si l'on ne veut pas s'exposer à des erreurs graves, dans l'emploi du principe de la décomposition des forces, on est bien obligé de s'appuyer non pas

sur une décomposition idéale mais effective, conformément à ce que nous avons déjà indiqué dans notre traité de statique élémentaire. On nous objectera peut-être que la force $N_{\prime\prime}$, pouvant être détruite par les obstacles qui maintiennent l'écrou dans une position invariable, il n'est plus permis de décomposer cette force : mais il y aura à répondre que cette force n'est appliquée directement ni aux obstacles ni à l'écrou même : elle agit immédiatement sur le corps de la vis, qui lui sert de moyen de transmission. Or ce corps de vis ne saurait agir sur la surface inébranlable de la pièce fixe que par un effort normal, et un effort tangentiel : et ces deux efforts partiels vont ensuite se détruire contre les obstacles : quant à la force $N_{\prime\prime} \sin a$ qui agit suivant la ligne Md dans le plan tangent, elle aura la valeur :

$$N_{\prime\prime} \sin a = \left(P \frac{r'}{r} \sin \alpha + Q \cos \alpha \right) \frac{\text{tang}\, \beta}{w} \ldots (11) \text{ M d.}$$

Pour que le frottement latéral que nous attribuerons à la force totale $N_{\prime\prime} \sin a$, afin d'éviter une décomposition de forces qui paraît peu utile, soit nul pendant le mouvement de la machine, il faut avoir : $N_{\prime\prime} \sin a = \text{ou} < f N$; ce qui donne par substitution :

$$\text{tang}\, \beta = \text{ou} < \frac{f}{\cos \alpha} \ldots (12).$$

cette inéquation de condition, remarquable par sa simplicité, doit être remplie, toutes les fois que l'usage particulier de la vis à construire le permettra, et elle n'est que le développement de l'inégalité (5). Si l'inéquation (12) est satisfaite, l'équation d'équilibre de la vis sera évidemment :

$$P . \frac{r'}{r} . \cos \alpha - Q \sin \alpha - f . N = o \ldots (13).$$

Substituant dans celle-ci la valeur de N, trouvée plus haut par l'équation (3), on obtiendra :

$$P = Q \frac{r}{r'} . \frac{w . \sin \alpha + f}{w \cos \alpha - f . \text{tang}\, a} \ldots (14).$$

Telle est aussi l'équation d'équilibre donnée par Navier : mais il en a donné aussi une autre où il attribue le frottement à la force normale $N_{,}$, et laquelle se trouve par suite en contradiction manifeste avec l'équation (14) que nous considérons comme seule admissible et exacte, conformément à ce qui a été dit ci-dessus.

L'auteur cité suppose aussi que quand la puissance est distribuée symétriquement autour de l'axe de la vis, les pressions normales occasionnées par les puissances partielles telles que $+\frac{1}{2}$ P, $-\frac{1}{2}$ P se détruisent dans la valeur totale de N, de sorte qu'on aurait au lieu de l'équation (3) celle-ci $N = \frac{Q}{w} \ldots (15)$, pour déterminer N dans ce cas. Mais en réfléchissant attentivement sur la chose, on se convaincra sans peine que la distribution symétrique de la puissance offre l'unique avantage de ne plus transmettre aucune pression à l'axe même de la vis, ce qui dès lors anéantit cette espèce de frottement dont nous ne tenons pas compte dans la théorie actuelle par les motifs déjà exposés au § I. De plus on comprendra aisément que la pression soufferte par la surface de l'écrou est absolument la même, quel que soit le mode de distribution régulier ou irrégulier de la puissance équilibrante, toujours censée horizontale. On ne saurait admettre l'équation (15) que comme une simple approximation pour tous les cas où l'angle α serait très petit.

Remarque I : En nommant i le rapport de l'effet utile produit à l'effet utile dépensé, on trouvera évidemment :

$$i = \frac{Q.\, dh}{P.\, r'\, d\omega} = \frac{Q}{P} \cdot \frac{dh}{r'\, d\omega} = \frac{Q}{P} \cdot \frac{r}{r'} \cdot \text{tang}\, \alpha \ldots (15).$$

dh et $r'd\omega$ dénotant les chemins virtuels contemporains et effectifs décrits par les points d'application de la résistance et de la puissance, dans les sens mêmes de ces forces. Si l'on substitue maintenant dans l'équation (15) la valeur du rapport $\frac{Q}{P}$, donnée par la formule (14), on obtient :

$$i = \text{tang}\, \alpha\, \frac{w \cos \alpha - f.\, \text{tang}\, \alpha}{f + w.\, \sin \alpha} \ldots (16).$$

Remarque II. Les formules précédentes comprennent la théorie de l'équilibre de la vis triangulaire pour laquelle la génératrice rectiligne

de la surface rampante oblique satisfait à l'inéquation (12); mais quand celle-ci n'est pas remplie, il doit y avoir un frottement latéral, surtout parce que les filets extrêmes ont presque toujours une certaine épaisseur, et dès lors il faudra employer un autre système de formules, puisque l'équation d'équilibre (13) ne comprendra plus toutes les résistances passives qui entrent en jeu. Cette remarque toute simple de notre part échappe à la théorie ordinaire qui se pose d'une manière absolue, et croit pouvoir embrasser dans une seule formule toutes les circonstances d'une semblable question.

Remarque III. La théorie de l'équilibre de la vis à filet quarré se trouve néanmoins comprise comme cas particulier, dans les formules établies, et s'en déduit par la supposition de $\beta = 0$ laquelle satisfait d'elle-même à l'inégalité (12). Or en nommant S le rapport de l'effet utile à l'effet dépensé, pour la vis quarrée, et conservant les autres notations, nous aurons par suite de cette hypothèse $\beta = 0$:

$$P = Q.\frac{r}{r'}.\ \frac{\text{tang}\,\alpha + f}{1 - f.\ \text{tang}\,\alpha} \ldots (17).$$

$$S = \ \text{tang}\,\alpha.\ \frac{\cos\alpha - f.\ \sin\alpha}{\sin\alpha + f\cos\alpha} \ldots (18);$$

Remarque IV. A l'aide des formules (16 et 18) on calculera aisément l'excès positif ou négatif S — i et l'on obtient :

$$S - i = \text{tang}\,\alpha.\frac{f.\ (1 - w.\ \cos\alpha)}{\cos\alpha\ (\sin\alpha + f\cos\alpha)\ (f + w\sin\alpha)}\ (19).$$

mais il est facile à voir que la quantité $1 - w\cos\alpha$ est constamment négative : donc l'excès $S - i$ est aussi négatif, ce qui donne $i > S$: ainsi contrairement à une opinion assez en vogue l'effet utile des vis triangulaires, satisfaisant à l'inégalité (12) est plus grand que celui des vis quarrées de même pas.

Cas du frottement latéral.

§ 3. Pour établir la théorie de la vis, avec frottement latéral, nommons R le rayon du filet extrême ; ds, ds' les éléments d'hélices

contemporains, décrits par les extrémités des rayons R, r, pendant que la force P tourne la vis sur son axe d'un angle élémentaire $d\omega$, tandis que la charge s'élève d'une quantité virtuelle dh; enfin soit f' le coëfficient du frottement latéral dû à la force excédante $N_{\prime\prime} \sin a - f. N$.

Le principe général des vitesses virtuelles effectives nous donnera :

$$P. r' d\omega - Q.\, dh - f N.\, ds - f' (N_{\prime\prime} \sin a - f N) ds' = 0 \ldots (20).$$

Or en posant pour abréger : $R^2 = m^2 r^2 + r^2$, on aura: $r' d\omega = \frac{r'}{r} ds \cos \alpha$, $dh = ds. \sin \alpha$, $ds' = ds \sqrt{1 + m^2 \cos^2 \alpha}$: Substituant ces valeurs dans l'équation posée, on la transforme en celle-ci:

$$(21) \ldots P = Q \frac{r}{r'} \frac{w. \sin \alpha + f + f' \cos \alpha . \tan\beta . \sqrt{1 + m^2 \cos^2 \alpha} - f. f'. \sqrt{1 + m^2 \cos^2 \alpha}}{w \cos \alpha - f. \tan\alpha - f' \sin \alpha . \tan\beta \sqrt{1 + m^3 \cos^2 \alpha} + f f'. \tan \alpha \sqrt{1 + m^2 \cos^2 \alpha}.}$$

Équation de laquelle on déduira sans peine, en vertu de l'équation générale... (15) :

$$(22) \ldots i = \tan \alpha \frac{w \cos \alpha - f \tan \alpha - f' \sin \alpha . \tan\beta \sqrt{1 + m^2 \cos \alpha} + f f'. \tan \alpha . \sqrt{1 + m^2 \cos^2 \alpha}}{w. \sin \alpha + f + f' \cos \alpha \tan\beta \sqrt{1 + m^2 \cos^2 \alpha} - f. f'. \sqrt{1 + m^2 \cos^2 \alpha}}.$$

Dans la plupart des cas de vis bien soignées la quantité en $f f'$ pour les deux derniers résultats pourra être considérée comme très-petite, et par suite négligée, ce qui donnera d'une manière suffisamment approchée :

$$(23) \ldots P = Q. \frac{r}{r'} \frac{w \sin \alpha + f + f' \cos \alpha \tan\beta \sqrt{1 + m^2 \cos^2 \alpha.}}{w \cos \alpha - f \tan \alpha - f' \sin \alpha \tan\beta \sqrt{1 + m^2 \cos^2 \alpha}} ..$$

$$(24) \ldots i = \tan \alpha \frac{w \cos \alpha - f \tan \alpha - f'' \sin \alpha . \tan\beta \sqrt{1 + m^2 \cos^2 \alpha.}}{w \sin \alpha + f + f' \cos \alpha . \tan\beta \sqrt{1 + m^2 \cos^2 \alpha.}}$$

Remarque. Si l'on veut présentement comparer l'effet utile produit dans les deux espèces de vis, il faudra retrancher les équations (24) et (18) membre à membre, ce qui donne :

$$(25) \ldots \frac{i-S}{\text{tang}\,\alpha} = \frac{f.w\,.\cos\alpha - f - f'\cos\alpha.\text{tang}\,\beta.\sqrt{1+m^2\cos^2\alpha}}{\cos\alpha(\sin\alpha+f\cos\alpha)(w\sin\alpha+f+f'\cos\alpha\,\text{tang}\,\beta\sqrt{1+m^2\cos^2\alpha})}.$$

Il est bien entendu que l'on suppose les quantités f et α les mêmes dans les deux espèces de vis. Or dans les hypothèses de $m=0$ et de $f'=f$, qu'on peut toujours considérer au moins comme approximativement exactes, on peut prouver que la quantité $i-S$ ne saurait plus être positive : ainsi il est généralement vrai que dans la vis triangulaire à frottement latéral l'effet utile est moindre que celui des vis quarrées de même pas, mais l'excès du dernier sur le premier devient d'autant moindre que l'inclinaison β s'approche davantage de sa valeur limite inférieure $\text{tang}\,\beta = \frac{f}{\cos\alpha}$ à laquelle correspond le moment d'extinction du frottement latéral. L'angle β étant une fois parvenu à cette limite, l'effet utile du filet triangulaire passe brusquement à une valeur supérieure à celle du filet quarré, parce qu'à la limite dont il s'agit on doit négliger les termes en f', ce qui revient à faire $f'=0$. Dans l'équation (25) ; on conçoit ainsi assez facilement la solution de continuité, occasionnée par le frottement dans l'effet utile et dans la formule qui le représente, parce qu'à une certaine limite de β on doit égaler à zéro une quantité constante, pour pouvoir passer de la formule (25) à la formule (19).

§. 4. Comme l'espace nous manque pour le développement des conséquences générales et particulières renfermées dans les formules qu'on vient d'établir, nous entrerons immédiatement plus avant dans les difficultés du sujet ; et à cette fin il nous faut examiner de près les méthodes par lesquelles Navier et M. Poncelet sont parvenus à des résultats que nous déclarons inadmissibles : or voici d'abord en peu de mots la marche analytique qui a conduit Navier aux résultats mêmes donnés par M. Poncelet :

Après avoir posé les équations de condition :

$$\text{P}r'\,d\omega - \text{Q}dz - \text{F}.ds = 0,\ dz - \text{tang}\,\beta.dr - r.\text{tang}\,\alpha.\,d\omega = 0,\ dr = 0:$$

dans lesquelles F exprime la force totale du frottement, et z l'ordonnée verticale de la surface rampante, Navier multiplie les deux dernières par les facteurs arbitraires λ, μ, respectivement, et les ajoutant ensuite membre à membre à la première, il trouve, à cause de :

$$ds = r \cos \alpha . \, d\omega + dz . \sin \alpha ,$$

l'équation résultante :

$$(\mathrm{P}.r' - \mathrm{F}.r\cos\alpha - \lambda . r . \operatorname{tang}\alpha)\, d\omega + (\mu - \lambda . \operatorname{tang}\beta .)\, dr + (\lambda - \mathrm{Q} - \mathrm{F}\sin\alpha)\, dz = 0 \ . \ . \ . \ (\mathrm{A}).$$

De là il tire, en égalant séparément à zéro, les coëfficients des quantités $d\omega$, dr, dz, les relations particulières :

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{P}\ r' - \mathrm{F}.\, r\cos\alpha - \lambda . r . \operatorname{tang}\alpha = 0 , \\ \mu - \lambda . \operatorname{tang}\beta = 0 , \\ \lambda - \mathrm{Q} - \mathrm{F}.\, \sin\alpha = 0. \end{array}\right\} \ . \ . \ . \ (\mathrm{B}).$$

Ensuite l'auteur remarque que les trois éléments linéaires $rd\omega$, dz, dr, étant rectangulaires entr'eux, si $\mathrm{L} = 0$ représente l'équation de la surface héliçoïde, la pression normale à cette surface, aura, (conformément à un théorème de mécanique analytique) la valeur suivante :

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{d\mathrm{L}}{dz}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{L}}{dr}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{L}}{rd\omega}\right)^2} = \lambda . w \ .$$

On aura donc aussi selon l'auteur $\mathrm{F} = f . \lambda . w$. De là il conclut, en éliminant λ entre la première et la troisième équation (B), la formule de MM. Poncelet et Persy. En outre cette méthode nous donne pour la pression normale :

$$\lambda . w = \frac{\mathrm{Q} . w}{1 - f . w . \sin\alpha} \ . \ . \ . \ (\mathrm{C}).$$

Enfin l'auteur remarque que la quantité μ, fournie par l'équation :

$$\mu = \lambda . \operatorname{tang}\beta = \frac{\mathrm{Q} . \operatorname{tang}\beta}{1 - f . w . \sin\alpha} \ . \ . \ . \ (\mathrm{D}).$$

représente une force dirigée suivant le rayon horizontal r, et détruite par la rigidité du système.

Nous observerons de notre côté que cette force horizontale μ, qui existe de l'aveu même de l'auteur, serait bien détruite par la rigidité du système, si en effet la surface cylindrique qui par son intersection avec la surface gauche donne le filet moyen, était une surface rigide et matérielle : mais comme ce n'est qu'une surface idéale, elle ne saurait absolument détruire aucune force, ni maintenir les deux pièces l'une dans l'autre : la surface fixe de l'écrou et les pièces latérales qui maintiennent le tout, pourront donc seules détruire la force dont il s'agit ; et à cet effet il faut que cette force puisse et doive se transmettre, en pressant la surface rampante du noyau contre celle de l'écrou: donc puisque cette pression ne saurait se faire que suivant la normale et une ligne tangentielle, il s'ensuit que pour avoir la pression normale véritable, il faut retrancher de la valeur $\lambda . w$ équation (C), la composante de μ, suivant la normale extérieure, et dès lors on retrouve en effet la pression normale, non plus telle que la donne l'équation (3), mais son équivalente ; comme nous ferons plus bas cette vérification sur les résultats mêmes de M. Poncelet, il est superflu de nous y arrêter en ce moment. On voit donc que cette manière de Navier, de faire usage du savant procédé de Lagrange est ici complètement en défaut. On peut même se rendre compte de cette application abusive sous le simple point de vue de l'analyse : en effet Navier dit expressément que le problème se réduit à l'équilibre d'un point sur une surface : et ne l'eût-il pas dit, ses calculs seraient là pour prouver qu'il entend la chose ainsi ; puisqu'il égale à zéro le coëfficient de chaque variation linéaire, sans tenir compte du mouvement effectif suivant l'hélice qui exige qu'on ait :

$$dz = r . \tang \alpha \, d\omega .$$

Or cette relation à laquelle le déplacement effectif est invariablement soumis, prouve que les variations dz, $rd\omega$, même après l'introduction des facteurs arbitraires λ, μ ne sont pas indépendantes, et que par conséquent il n'est plus exact d'égaler séparément à zéro les coëfficients de ces variations.

Si, comme nous le croyons, nous avons bien saisi la présente difficulté, l'hypothèse de Navier consisterait à admettre que quand des forces actives et passives se font équilibre sur un système rigide défini, assujetti de manière à ne pouvoir prendre qu'une seule espèce de mouvement, que la somme des moments virtuels arbitraires de

ces forces soit encore égale à zéro : or une telle hypothèse, que nous rencontrerons encore ailleurs, étant seulement envisagée en elle-même et indépendamment de la remarque analytique faite ci-dessus, est gratuite et reste sujette à contestation, du moins dans de certains cas tels que celui dont il est maintenant question : en effet pour qu'une force p par exemple fasse équilibre à la charge Q et aux frottements, il est évidemment nécessaire et suffisant que le moment virtuel effectif de la première soit égal à la somme des moments effectifs et contemporains des autres ; car dès que cette condition est remplie, le seul mouvement possible du système se trouve anéanti ; et c'est là tout ce qu'il faut pour l'équilibre statique ; et une considération semblable reste applicable au cas de l'équilibre dynamique. Mais s'il en est ainsi, qui oserait encore égaler à zéro la somme des moments virtuels arbitraires des forces en équilibre ? Il est vrai de reconnaître que Navier a restreint ses variations linéaires à un déplacement arbitraire sur la surface héliçoïde ; mais cette restriction est insuffisante encore : puisque par la nature de la machine il est seulement possible suivant l'hélice de la surface.

§ 5. Pour ajouter à ce qui précède de nouveaux éclaircissements, nous exposerons brièvement la solution de M. Poncelet auquel nous sommes d'ailleurs redevables de beaucoup, et à qui nous ne saurions témoigner assez de reconnaissance pour ses écrits de mécanique si profonds, si pleins d'idées lumineuses : mais, quelque grande que soit notre confiance dans sa haute capacité, nous ne pouvons, pour la question présente, partager l'opinion qu'il s'est formée d'après les inspirations de la théorie ordinaire qui tombe ici en défaut.

Nommons avec M. Poncelet φ l'angle compris entre la verticale et le plan tangent à la surface gauche au point donné M : dN étant la pression normale qui sollicite l'un quelconque des éléments du filet moyen, cette pression fera naître, dit l'auteur, un frottement fdN, agissant le long de la tangente au filet, et ces deux forces ayant pour composantes $d\text{N} \sin \varphi$, $fd\text{N} \sin \alpha$ suivant la verticale, on aura pour 1[re] condition d'équilibre :

$$Q = \int d\text{N}.\sin\varphi - f.\int d\text{N} \sin\alpha = \text{N}.(\sin\varphi - f.\sin\alpha) \text{.... (E).}$$

équation dans laquelle N représente la somme de toutes les pressions normales qu'on peut supposer concentrées en une seule, suivant la normale au plan tangent en un point quelconque du filet moyen. L'auteur pose ensuite l'équation des moments virtuels effectifs, dans laquelle il substitue la valeur de N, fournie par l'équation

(E), et de cette manière il obtient, en faisant $r' = r$, et remarquant que $\sin \varphi = \frac{1}{w}$:

$$P = Q \frac{\tang \alpha + f.\, w.\, \cos \alpha}{1 - f.\, w.\, \sin \alpha} \ldots\ldots (F).$$

et telle est aussi, aux notations de Navier et à nos abréviations près, la formule de M. Persy de Metz, mentionnée dans l'ouvrage de l'auteur. Si nous remplaçons encore la quantité $\sin \varphi$ par sa valeur, dans l'équation (E), nous aurons d'après la méthode de l'auteur, pour valeur de la pression normale :

$$N = Q. \frac{w}{1 - f.\, w.\, \sin \alpha} \ldots\ldots (G).$$

On peut prouver que cette valeur de N est en effet identique à celle de $N_{\prime}$ équation (9. § 2) : car en reprenant celle-ci, et faisant $r' = r$, on obtient :

$$N_{\prime} = P.\, \sin \alpha .\, \cos \alpha .\, w + Q.\, w.\, \cos^2 \alpha.$$

Substituant dans cette égalité la valeur de P en Q, fournie par l'équation (F), on retrouve pour $N_{\prime}$ celle de N, donnée par la relation (G). Ainsi à cet égard il y a un accord parfait entre les résultats de M. Poncelet et ceux qu'on déduit de la méthode de Navier, exposée au § 2, et de sa méthode analytique exposée au § 4. Or nous avons fait connaître plus haut les motifs qui nous portent à rejeter ces deux dernières méthodes et les résultats qu'elles amènent, comme inexacts, il nous reste donc à faire connaître notre manière de voir sur la méthode de M. Poncelet :

Pour parvenir aux équations (E et G), l'auteur suppose qu'il y ait équilibre entre les forces P et Q; les frottements, et la pression normale, prise en sens contraire, et considérée comme force active ; et de là il conclut que la somme des projections des forces de toute espèce sur une droite quelconque, partant sur la verticale, doit être égale à zéro. En effet dans cette manière de raisonner on est ramené à l'équation (E). Notre mode d'interprétation des hypothèses et des raisonnements de l'auteur est donc bien certainement à l'abri de toute contestation, et nous pourrons par conséquent appliquer sans

crainte à l'équation (E) ou (F) les objections dont elle nous paraît susceptible.

D'abord nous demanderons sur quel pied on entendra traiter la force du frottement, en établissant qu'il y ait équilibre entre les forces actives, les pressions normales prises en sens contraire, et entre les frottements? Si l'on envisage ceux-ci comme des forces actives, il faudra admettre l'équation d'équilibre (E); mais si on veut les assimiler à des obstacles qu'on remplace déjà par des forces actives contraires, ne faudra-t-il pas aussi se résigner à prendre les frottements en sens contraire? Dès lors on devrait remplacer l'équation (E) par cette autre

$$Q - N \sin. \phi - fN \sin. \alpha = 0,$$

qui donnerait pour N une valeur différente de celle de l'équation (E). Mais passons sur cette observation qu'on peut facilement refuter : qu'aura-t-on à répondre à l'objection suivante? Quand on prend la pression N en sens contraire, il faudra bien, pour pouvoir faire équilibre aux forces P. Q. f. N, qu'elle puisse être considérée comme appliquée au corps même de la vis; mais dès lors, il n'y aura plus de frottement : n'est-il donc pas absurde d'admettre que l'équilibre ait lieu entre les forces P, Q, fN — N ? Rien du moins dans la théorie ordinaire ne justifie l'exactitude d'une telle hypothèse. Quant à nous, nous n'avons que faire de cet équilibre entre *forces actives*, *passives* et *pressions normales*, *prises en sens contraire :* une seule chose bien claire ici, qui frappe au premier abord, c'est que l'équilibre subsiste entre les forces sollicitantes P, Q, et les frottements qui sont dûs aux pressions normales et à la constitution physique de la matière. Or pour assurer cet équilibre, il est *nécessaire* et *suffisant* que la somme des moments virtuels effectifs de toutes ces forces soit nulle. Quant à la pression normale elle-même, il faut l'évaluer, conformément à ce qui a été expliqué plus haut par l'exemple de la vis, d'après le principe direct de la composition et décomposition des forces, et même dans des questions plus compliquées, par un principe de transmission encore inconnu, qui se diversifie avec la nature mécanique du système que l'on considère : D'ailleurs notre manière de procéder, justifiée par une décomposition de forces effective a amené une pression normale différente (équat. 3) de celle de l'équation (G), et elle prouve par conséquent l'inexactitude de l'hypothèse même que nous combattons. Il est vrai de dire, qu'on pourrait rétorquer cet argument contre nous ; mais dès lors on serait obligé de

nier l'exactitude de la décomposition *effective* et *naturelle* des forces. Or voilà ce que nous ne pourrons jamais admettre ; et dans la théorie ordinaire elle-même on devra éprouver une répugnance invincible à faire une telle supposition. Du reste nous pouvons faire valoir d'autres moyens de justification de nos idées : ces moyens se réduisent à soumettre ces idées et les deux théories que nous venons d'établir et de discuter par une méthode générale et directe, à toutes les vérifications particulières possibles. C'est ce que nous entreprendrons dans les §. suivants.

Épreuves particulières.

§ 6. Lorsque dans la formule (F) on suppose $\beta = 0$, on retrouve la théorie d'équilibre de la vis à filet quarré, telle que la donne déjà la formule (17) déduite de la théorie comprise dans l'équation (14) : mais cette vérification de la théorie ordinaire n'en est pas une, et le résultat particulier qu'elle amène dans la supposition de $\beta = 0$, doit être exact, lors même que la formule générale (F) ne le serait pas ; car l'erreur renfermée dans la valeur de N, s'anéantit avec $\beta = 0$:

Supposons en second lieu β quelconque et $\alpha = 0$: la formule (F) donnera :

$$P = Q. \frac{f}{\cos \beta} \ldots\ldots \qquad (H).$$

et la notre deviendra :

$$P = Q.f. \cos \beta \ldots (26).$$

de sorte que maintenant les deux résultats sont contradictoires, sauf le seul cas particulier de $\beta = 0$. L'auteur cité a déjà fait la comparaison précédente et selon lui le résultat de sa formule (H) est préférable comme étant plus conforme à sa théorie du coin. Mais comme nous n'admettons pas cette dernière théorie, cette plus grande conformité n'est ici d'aucune importance : de plus on pourrait démontrer assez facilement que dans la théorie ordinaire (F) il est permis de faire à la fois $\alpha = 90°$, $\beta = 0$: donc il est permis de faire $\beta = 90°$ dans l'équation (H), ce qui donne : $P = \infty$. Or $\alpha = 0$ réduit d'abord l'hélice à une circonférence de cercle horizontal, et $\beta = 90°$ réduit ensuite la surface heliçoïde à un plan vertical : Il suit de là que pour

mouvoir un corps pesant pressant le noyau cylindrique par un point de sa circonférence de cercle horizontale contre la circonférence fixe d'un cylindre enveloppe qui remplace l'écrou, il faudrait une force infinie : or ce résultat est absurde : ainsi la formule (F) ne supporte déjà plus l'épreuve particulière de $\alpha = 0$, $\beta = 90°$ à la fois. Mais dès lors aussi notre théorie donnera, nous dira-t-on, un résultat également absurde $P = 0$: car il est évident qu'il faut une force motrice $P = Q.f$. Cette objection à notre théorie n'est qu'apparente : en effet la formule générale (14) sur laquelle est basé le résultat (26) suppose l'inégalité (12) et n'est plus admissible pour le cas de $\tan\beta > \frac{f}{\cos\alpha}$: Donc dans notre formule (26) il n'est pas permis de faire $\beta = 90°$.

Si donc nos idées sont exactes, c'est la formule (23) qui devra supporter l'épreuve des suppositions $\alpha = 0$, $\beta = 90°$ à la fois : or en introduisant ces valeurs de α, β dans la formule citée, et prenant pour plus de simplicité $r' = r$, $f' = f$, on obtient 1° pour $\alpha = 0$:

$$P = Q.f.\left(\frac{1 + \tan\beta}{\sqrt{1 + \tan^2\beta}}\right) = Q.f.(\cos\beta + \sin\beta).$$

si l'on pose ensuite $\beta = 0$, il viendra :

$$P = Q.f.$$

Et ce résultat, qui était évident d'avance, puisque il suffira d'une force propre à vaincre le frottement pour entretenir le mouvement uniforme du système dans le cas de $\alpha = 0$, $\beta = 90°$, offre déjà une confirmation de notre théorie, tandis que le résultat absurde $P = \infty$ fourni par la théorie ordinaire rend celle-ci inadmisible. Aussi Mr. Poncelet lui-même avoue-t-il que la formule (F) ne doit pas être exempte de tout reproche ; et par suite il la transforme en une autre, en évaluant d'une manière différente de son premier procédé l'effet absorbé par le frottement.

§ 7. Selon l'auteur cité il faut tenir compte du frottement qui dans le sens des génératrices de la vis triangulaire s'oppose à la compression réciproque de la vis et de l'écrou, ou si l'on veut, à ce que cette même vis puisse descendre, sans tourner autour de son axe, par l'effet du refoulement dont il s'agit. L'intensité absolue de cette force étant mesurée par $f.N$, et l'angle qu'elle forme avec la verticale étant $90° - \beta$, elle donnera la composante verticale $f.N.\sin\beta$, laquelle s'opposera

celet. Mais ici encore nous ne saurions admettre son interprétation : En effet avant tout il faut conserver les hypothèses de la question générale qui admet une surface héliçoïde fixe et mobile, et qui suppose que la puissance agisse suivant une ligne horizontale, tangente au cylindre du rayon r, et qu'enfin la charge Q glisse en un seul point M sur la surface héliçoïde mobile du noyau contre la surface fixe de l'écrou : En faisant les suppositions $\alpha=0$, $\beta=90°$, il faudra donc continuer à supposer que la surface de l'écrou qui devient un plan vertical, tangent à un cylindre vertical, soit encore capable de servir d'appui à la charge verticale Q, et à cet effet on devra concevoir qu'elle soit munie d'une droite horizontale et matérielle, tracée dans ce plan vertical : Dès lors la charge Q pressant le point M de cette droite, occasionnera un frottement Qf, qui pour être vaincu exige une force motrice $P = Qf$, telle que la donne notre théorie. Sans doute si l'on suppose que le plan tangent du noyau chargé d'un poids Q, soit pressé contre la surface concave du cylindre enveloppe avec une force normale $N = \frac{Q}{f}$, il faudra pour faire tourner le noyau sur son axe une force $P = f.\frac{Q}{f} = Q$, ce qui montre seulement l'accord des deux résultats de l'auteur : mais cette nouvelle supposition fait intervenir une force particulière qui n'existe pas dans la question générale, car évidemment les forces P et Q ne sauraient rien produire de cette pression normale $\frac{Q}{f}$, puisqu'elles agissent toutes deux dans le plan vertical même auquel se réduit la surface gauche. Du reste admettons aussi pour un instant cette interprétation et les formules (K), qui y conduisent; la théorie ordinaire présentera encore des difficultés pour le cas où l'on suppose la matière de l'écrou et de la vis parfaitement dûre et absolument incompressible : car alors, elle nous laisse dans l'embarras du choix de la formule (F) et (K). Supposons dans les équations (K) les frottements nuls, ce qui donne $f=0$ et $N=Q.$ $w=Q\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha+\text{tang}^2\beta}$ $=Q\sqrt{1+2\,\text{tang}^2\beta}$ pour le cas de l'une des surfaces héliçoïdes satisfaisant à la condition de $\alpha=\beta$:

Dans les mêmes équations (K) supposons f quelconque, et $\beta=\alpha$: on aura encore pour valeur de la pression normale la quantité $Q\sqrt{1+2\,\text{tang}^2\alpha}$: ainsi pour le cas d'une surface héliçoide $\beta=\alpha$, la

pression normale occasionnée par la charge et la puissance P capable de l'équilibrer, avec les frottements, serait les mêmes que pour le cas du simple équilibre rationnel, ce qui est encore évidemment absurde, puisque le surcroît de force horizontale, capable de vaincre les frottements, doit ajouter quelque chose à la pression normale primitive : ceci prouve donc de nouveau que les formules (K) présentent comme (F) des difficultés, dont on ne saurait se rendre compte au point de vue des idées en vogue, et qui tombent d'elles-mêmes quand une fois on veut admettre les hypothèses et les idées nouvelles, que nous avons énoncées dans notre cours de statique, et que nous venons de produire en grande partie dans la présente dissertation.

§ 8. *Admettons avec M. Poncelet les données numériques* $f = 0,I$, tang $\alpha = 0,04$, tang $\beta = 1$, et pour nos formules prenons en outre $f' = 0,I$, $m = 0$: La formule (F) qui dans la plupart des cas pratiques ne s'écarte pas bien sensiblement des formules (K), et que pour cette raison l'auteur conserve dans ces mêmes cas, donnera : $P = 0,18\,Q$: la formule de la vis quarrée fournit $P = 0,14\,Q$, tandisque la formule (14) donne seulement $P = 0,07\,Q$: or une valeur numérique aussi faible en comparaison des deux premiers résultats paraît évidemment inadmissible, et c'est ce qui a porté sans doute l'auteur à suspecter l'exactitude de la théorie qui conduit à la formule (14) : certainement le résultat numérique 0,07 Q est ici inadmissible; mais c'est à tort qu'on emploie dans ce cas la formule (14) qui suppose toujours tang $\beta < \dfrac{f}{\cos\alpha}$: car comme on donne tang $\beta = I$, et $f = 0,I$, $\cos\alpha = I$ à très peu près, on aura tang $\beta > f : \cos\alpha$; donc c'est la formule (23) qui doit être appliquée au cas actuel, et celle-ci donnera pour $r' = r$, $P = 0,182\,Q$.

Soit en second lieu tang $\alpha = 0,5 = \frac{1}{2}$, d'où $\sin\alpha = 0,4472$, $\cos\alpha = 0,8944$: La formule (F) donnera $P = 0,68\,Q$, la formule (14) fournit $P = 0,597\,Q$ en laissant les autres données numériques les mêmes ; ainsi on aura encore tang $\beta > f : \cos\alpha$; donc il faut rejeter le résultat 0,597 Q fourni par (14), et le remplacer par celui $P = 0,69\,Q$ fourni par la formule (23) ; la théorie de la vis quarrée donnera $P = 0,65\,Q$. Ainsi dans chacun de ces exemples la vis triangulaire est moins avantageuse que la vis quarrée de même pas ; ce qui est d'ailleurs conforme à ce qui a été établi plus haut à la fin du § 3. —

Remarque et *avis* : Nous croyons devoir borner pour le moment la

présente dissertation au peu de lignes qui précèdent ; mais nous avons plus longuement élaboré cette matière de l'équilibre de la vis, en tenant compte de l'étendue de la surface hélicoïde ; nous profiterons de la première occasion favorable pour livrer la suite de notre travail à la publicité, et nous allons réparer dans les deux § suivants quelques omissions au texte :

§. 9. Pour éviter au lecteur l'embarras de devoir chercher quelques formules de géométrie analytique qu'on admet dans le texte, nous les exposerons d'après la méthode fort simple, suivie à cet égard par M. Dubois notre collègue :

Les traces du plan tangent sur les deux plans zy, zx. } sont $z = -y \tan \alpha$. $z = -x \tan \beta$.

L'équation du plan tangent sera donc :

$$z + y \tan \alpha + x \tan \beta = 0.$$

Donc dans les équations de la normale au plan tangent au point M, origine des coordonnées, seront à leur tour :

$$z = y : \tan \alpha, \; z = x : \tan \beta.$$

Mais en nommant P une partie arbitraire de la normale dont le point extrême soit $(x, y, z,)$ on aura :

$$P^2 \cos a = x, \; P^2 \cos b = y, \; P^2 . \cos c = z.$$

$$P^2 = x^2 + y^2 + z^2 .$$

En substituant dans la dernière pour x, y, leurs valeurs en z, on obtient :

$$P = z . w, \; \cos a = \frac{x}{z} \cdot \frac{I}{w} = \frac{\tan \beta}{w}.$$

$$\cos b = \frac{\tan \alpha}{w}, \; \cos c = \frac{1}{w}.$$

§. 10. Nous croyons avoir suffisamment prouvé que pour déterminer les pressions normales, il n'est point permis d'égaler à zéro la somme des projections des forces de toute espèce, les pressions normales étant prises en sens contraire, et considérées comme forces actives. Il existe même des cas où abstraction faite des frottements, il est encore absurde de déterminer ainsi les pressions normales par ce procédé de la théorie ordinaire. L'exemple de la vis nous servira encore utilement ici ; mais auparavant essayons d'établir bien clairement les hypothèses de la théorie ordinaire :

Quand des forces se font équilibre sur un système matériel, par le moyen de points fixes et de surfaces d'appui, cette théorie admet:

1° Que les forces sollicitantes données fassent équilibre aux pres-

sions normales souffertes, prises en sens contraire et considérées comme forces actives :

2° Que par suite de cet équilibre il soit permis d'égaler à zéro la somme des projections des forces de toute espèce, sur un axe quelconque.

Les discussions auxquelles nous nous sommes livré précédemment, prouvent suffisamment que la dernière de ces deux suppositions est bien sujette à contestation ; mais sans décider ici laquelle des deux est plus ou moins contestable, nous pouvons démontrer que cet accouplement d'hypothèses qui constitue dans la théorie ordinaire le moyen de déterminer les pressions normales, peut conduire à des résultats inexacts : En effet si cette manière de procéder est toujours exacte, il faut que nous puissions déterminer la pression normale N, occasionnée sur la surface de l'écrou par une charge Q et une force équilibrante P, en disant que la force — N équilibre les agents P et Q, sur le corps de la vis, considéré comme parfaitement libre ; partant la somme des projections orthogonales de nos trois forces sur la verticale de Q, et sur l'horizontale de P sera égale à zéro; on aura donc

$$Q - N \cdot \sin \varphi = 0, \; P - N \cos b = 0.$$

ou

$$Q - N \frac{1}{w} = 0, \; P - N \cdot \frac{\tang \alpha}{w} = 0.$$

Remarquons que ces égalités donneront constamment la même valeur de P et Q, quelle que soit d'ailleurs celle de N. Ainsi le résultat d'élimination $P = Q. \tang \alpha$, qui exprime la condition d'équilibre exacte de la vis, ne saurait être invoqué pour justifier la valeur de $N = Q\,w$:

Mais en opérant maintenant d'après le principe direct de la décomposition *effective* et *naturelle* des forces, nous trouverons comme au § 1 un résultat absolument de même forme que celui de l'équation (3), savoir :

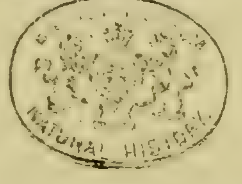
$$N = \frac{P \tang \alpha + Q}{w}.$$

Or sauf le cas de $\beta = 0$, jamais cette dernière valeur de N ne saurait s'accorder avec celle de $N = Q.\ w$. Mais d'après ce qui a été dit, on ne saurait plus contester l'exactitude de la valeur de N, fournie par la décomposition effective des forces ; donc celle de la théorie ordinaire déduite de son moyen général de détermination des pressions normales est erronée. Et en effet l'équation $N = Q\,w$ nous

montre que α restant constant, la pression normale $Q.\ w = Q.$ $\sqrt{1+\tang^2 \alpha + \tang^2 \beta}$ produite par les forces P et Q augmente avec l'angle β, ce qui revient à dire qu'elle augmente avec l'inclinaison du plan tangent sur l'horizon, de sorte que pour le cas d'un plan tangent très près d'un plan vertical cette pression, produite par les forces verticale et horizontale Q et P deviendrait immensément considérable, et que pour la position verticale elle serait infinie; or de pareils résultats sont inadmissibles, puisqu'il est conforme au sens commun de supposer que la pression normale doit au contraire diminuer, quand l'inclinaison du plan tangent augmente et de la considérer comme nulle, quand ce plan devient vertical. Or c'est ce que donne aussi la formule de la décomposition naturelle, puisqu'elle fournit $N = 0$, pour $\beta = 90°$:

D'ailleurs comme il s'agit simplement ici d'une question d'équilibre rationnel, on ne saurait plus échapper aux difficultés signalées ci-dessus, en interpretant l'effet dynamique des frottements de deux manières différentes, en recourant à la compressibilité de la matière de la vis et de l'écrou.

TABLE DES MATIÈRES.



FIN.

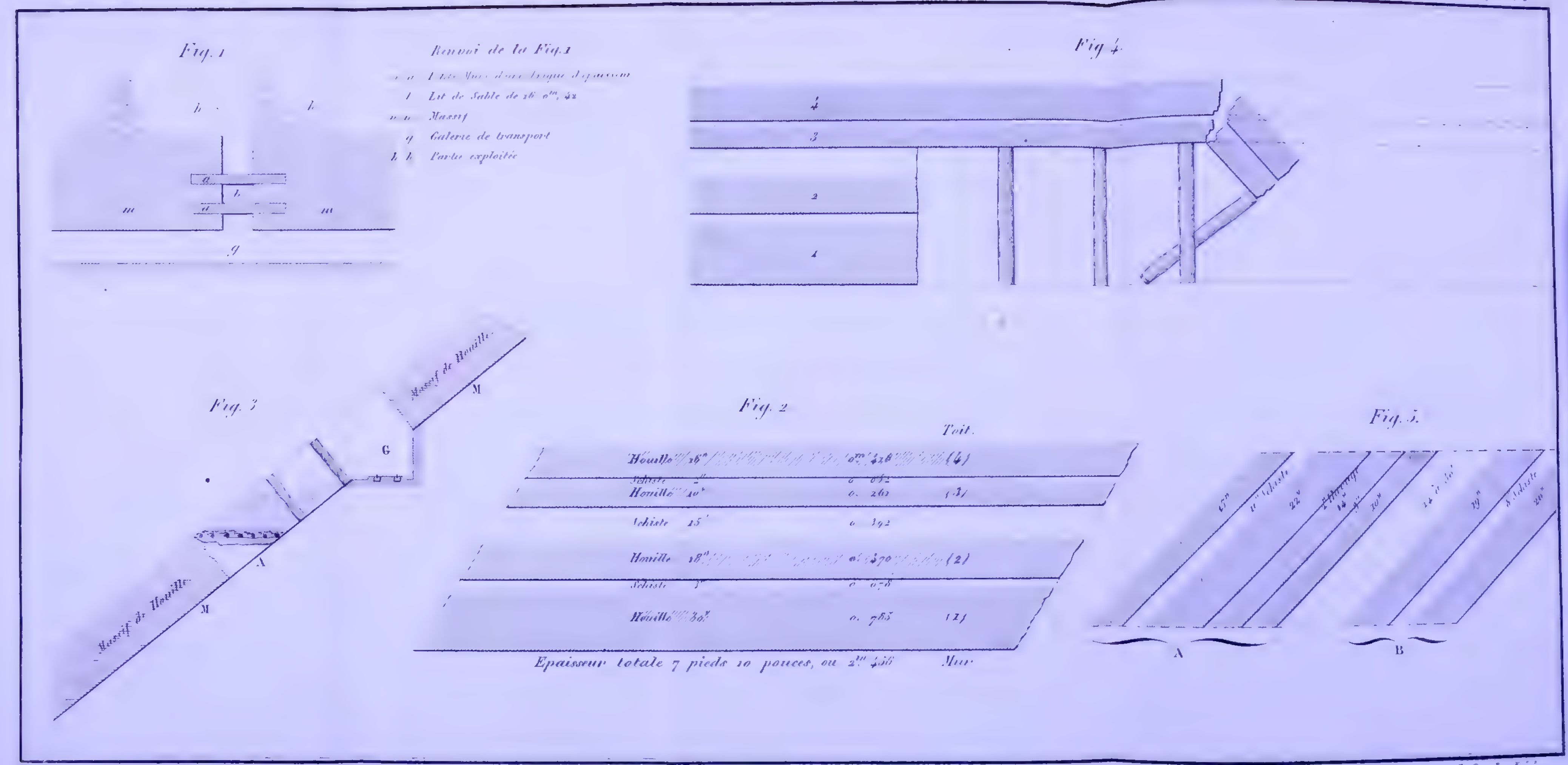
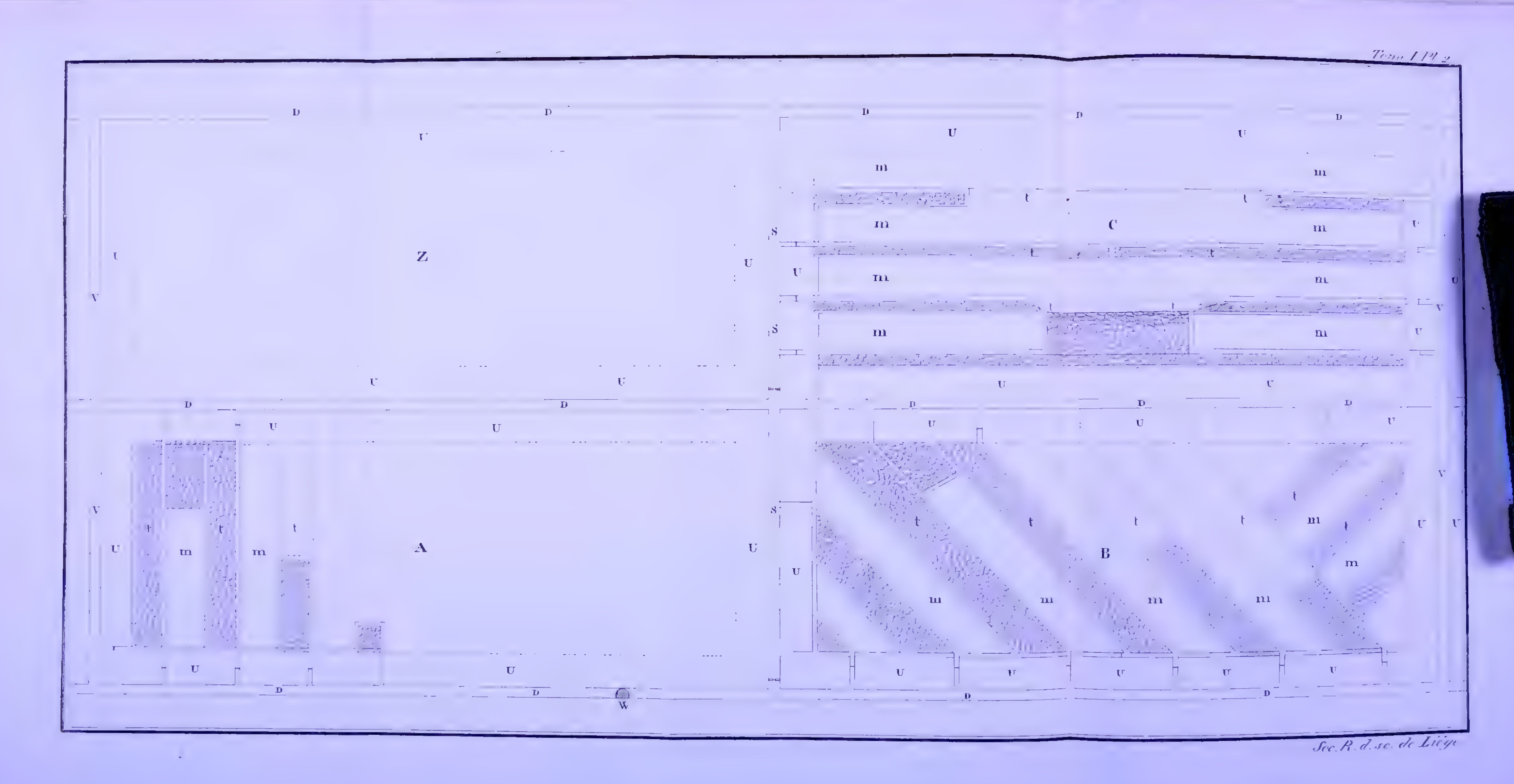
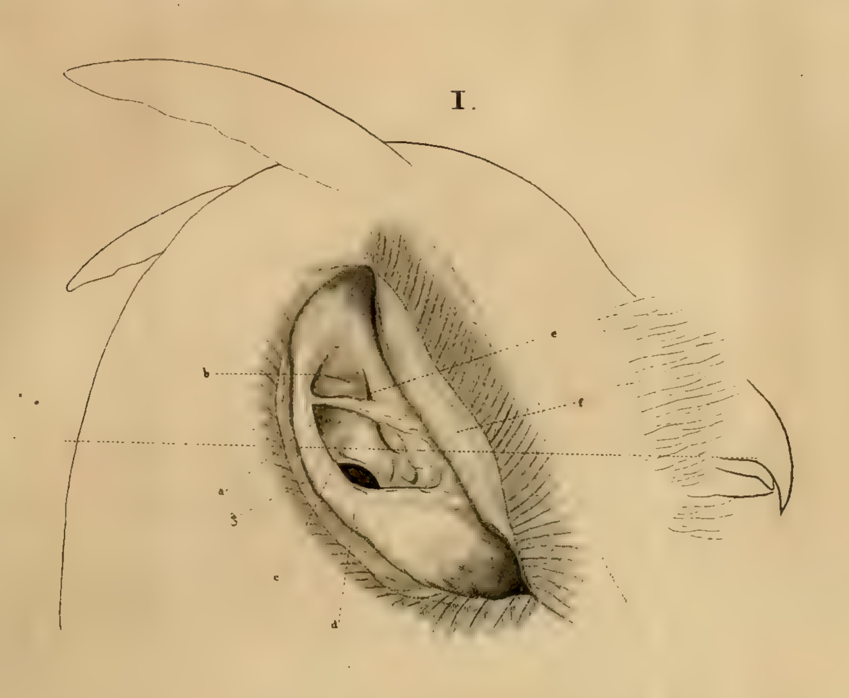


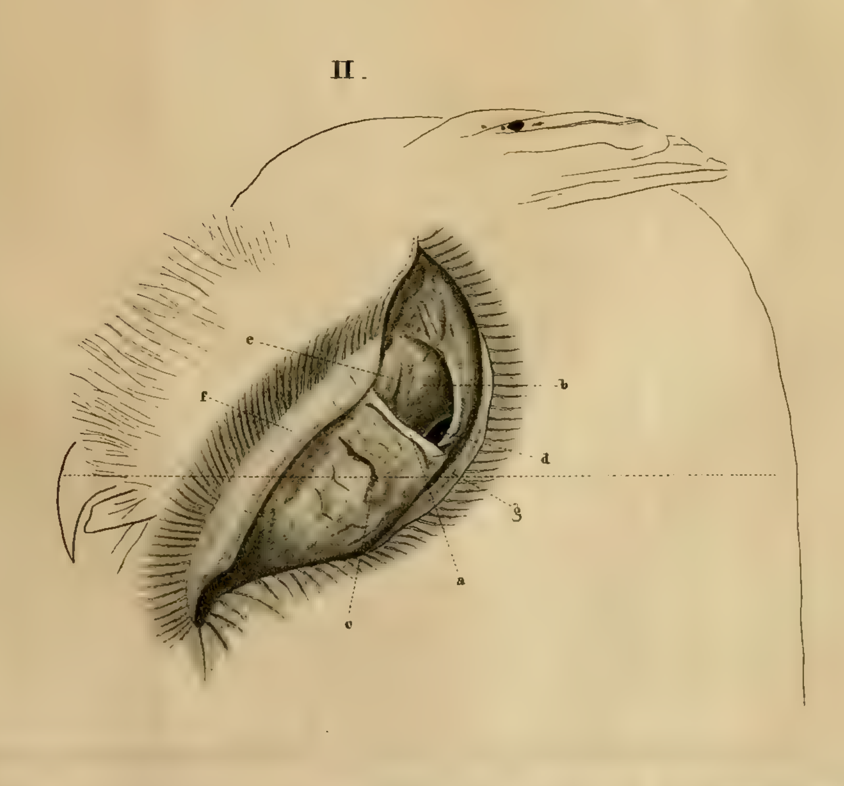
Fig. 1
Renvoi de la Fig. 1
l Lit de Sable de 16' 0m, 42
Massif
g Galerie de transport
Partie exploitée
m
m
g
Fig. 4.
4
3
2
1
Fig. 3
Massif de Houille
M
G
A
Massif de Houille
M
Fig. 2
Toit.
Houille 16" 0m, 418 (4)
Houille 10" 0. 261 (3)
Schiste 15' 0 392
Houille 18" 0. 470 (2)
Houille 30" 0. 785 (1)
Epaisseur totale 7 pieds 10 pouces, ou 2m 456
Mur
Fig. 5.
A
B


Z
A
B
C
W

I.



II.



P. J. Vanbeneden ad nat. del.

Lith. de H. Dessain à Liège.

Strix otus. linn.



Fig 1

Fig 2

Fig 3

Fig 4

Fig 5

Fig 6

Fig 7

Fig 8.

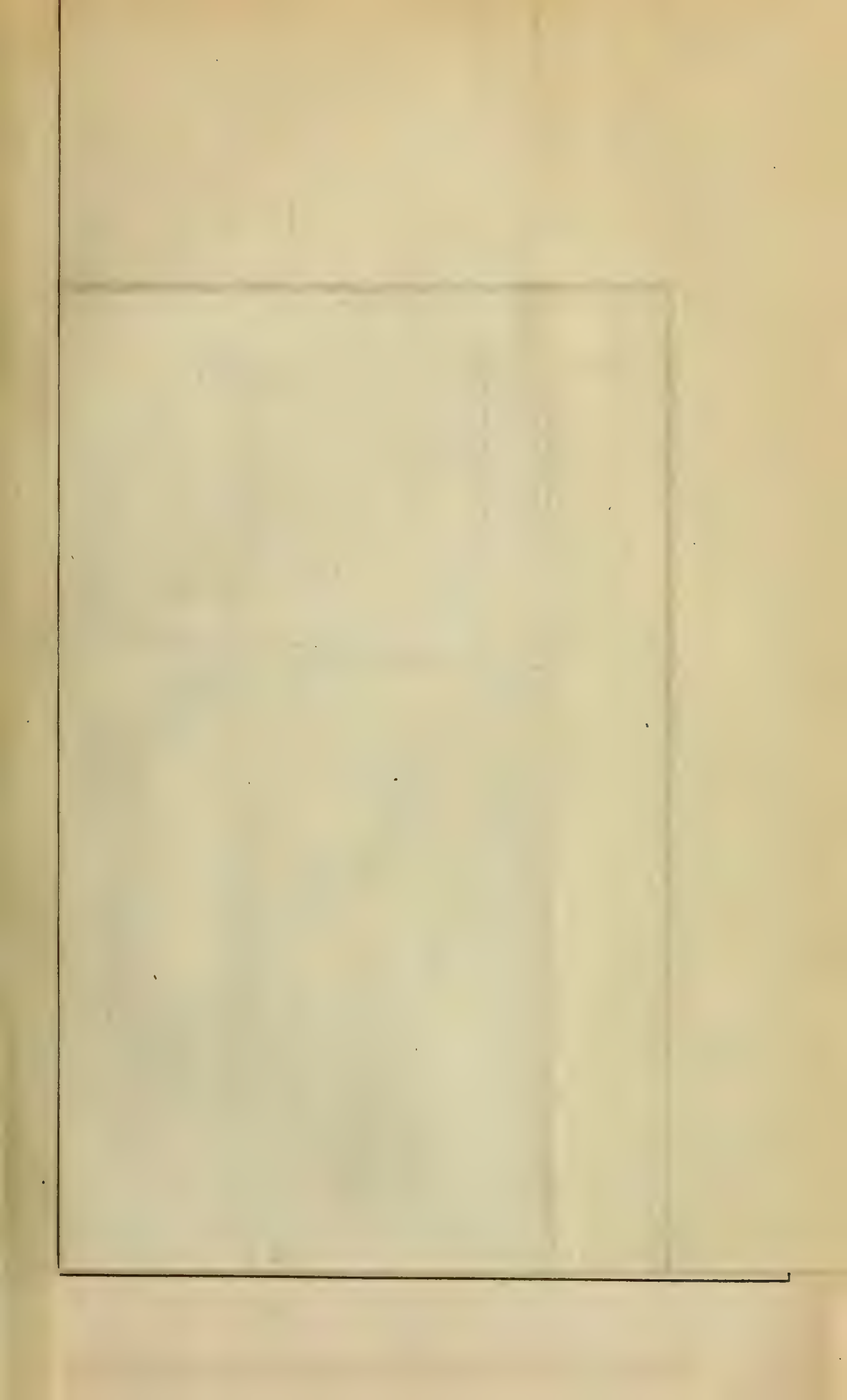
Fig 9.

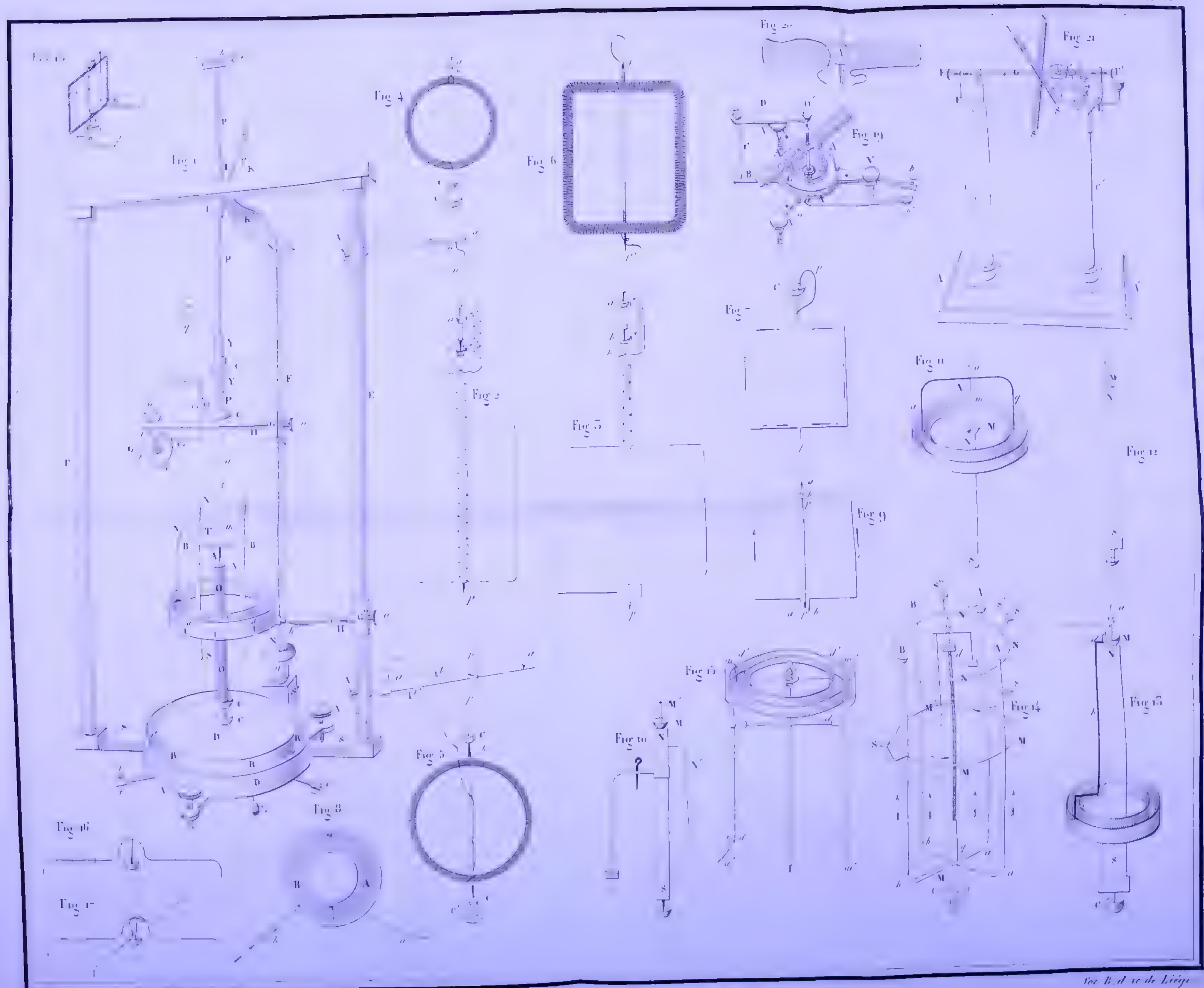
Fig 10.

Fig 11.

Fig 12

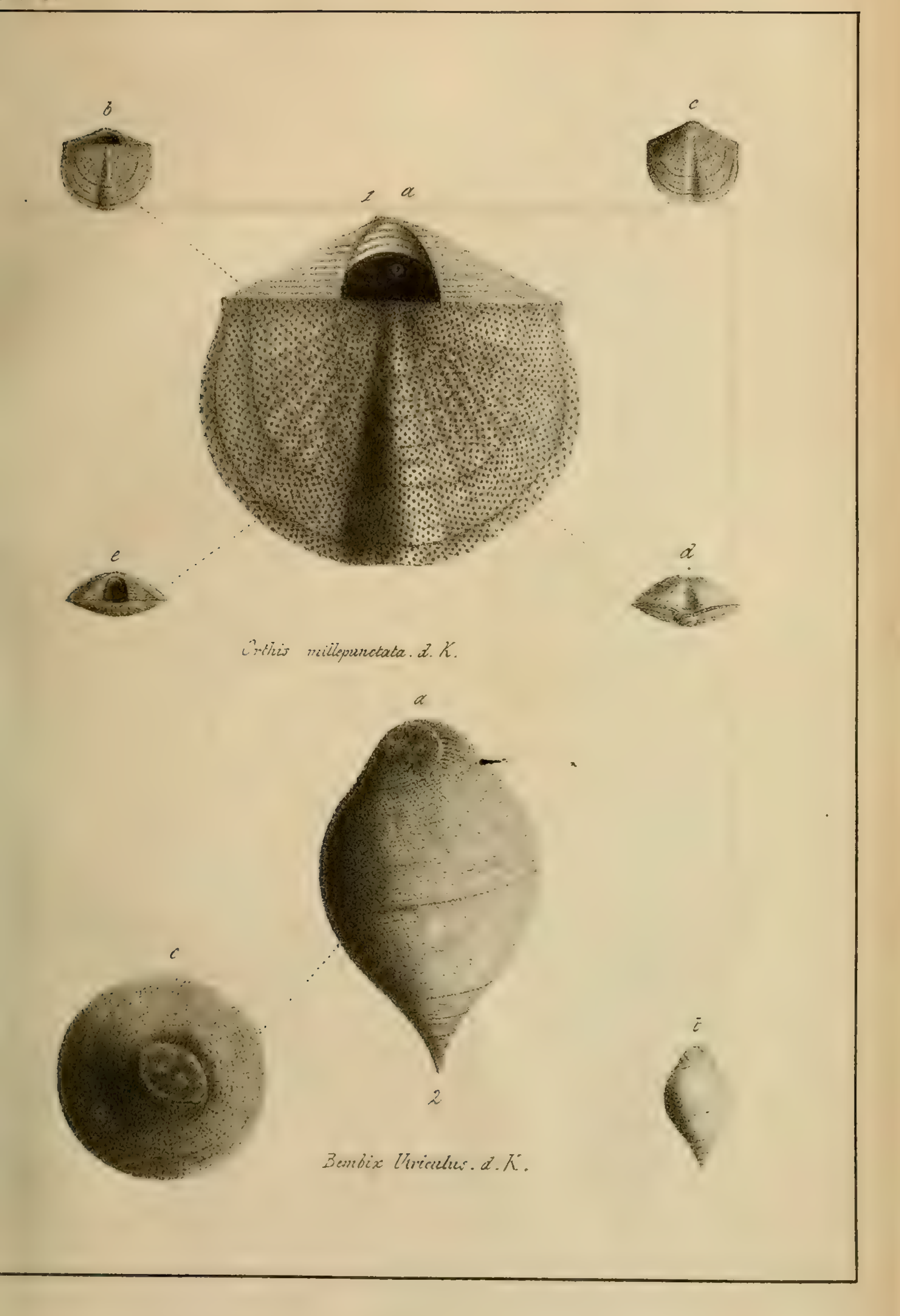
Fig. 13





Soc. R. d. sc. de Liége

Pl. 6.



Orthis millepunctata. d. K.

Bembix Utriculus. d. K.

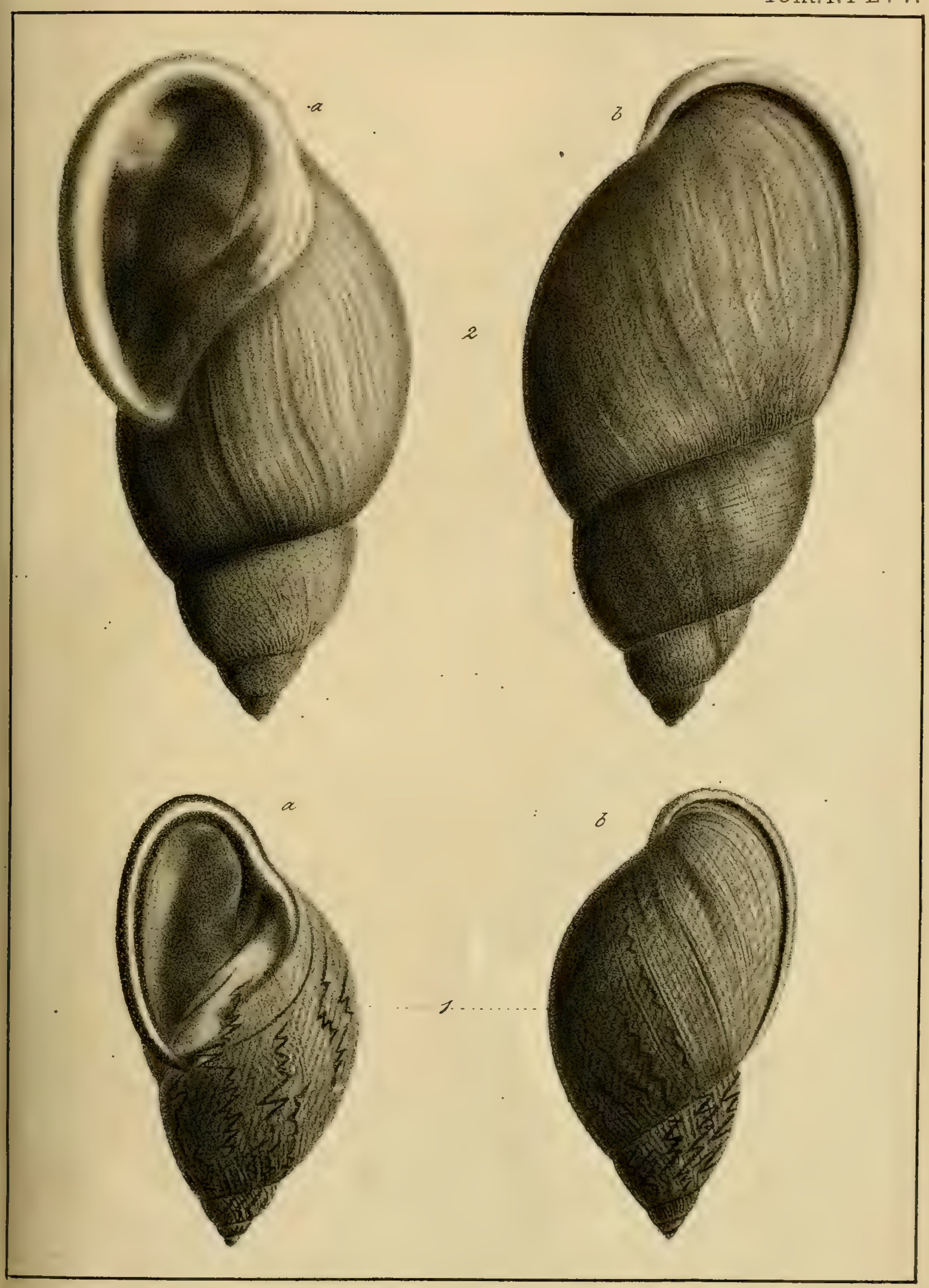


Fig. 1. Bulimus fulminans. Nyst. Fig. 2. Bulimus Funckii. Nyst.

Lith. de H. Dessain.


NATURAL

